Задача №2. 11 класс | 300 — 1/6

• Абсолютная зв. величина:

$m_{абс} = m + 5 - 5\lg r(пк) = 4^m + 5^m - 5\cdot 2^m = -1^m$

• Тогда болометрическая зв. величина:

$m_{бол} = m_{абс} + \Delta m = -2^m$

• а светимость звезды (в $L_\odot$): (согласуется с зависимостью $L \sim M^4$ для звезд Г.П. $L = 625 M_\odot$)

$L = 10^{-0,4\cdot(m_{бол} - m_\odot)} L_\odot = 10^{2,7} L_\odot \approx 700 L_\odot$

• Тогда, согласно закону Стефана-Больцмана:

$L = S\sigma T^4$; $\frac{L}{L_\odot} = \frac{R_{ср}^2}{R_\odot^2}\cdot\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4$ (где σ — постоянная С.-Б., R — радиусы, T — температуры)

$R_{ср} = \sqrt{\frac{L}{L_\odot} : \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4}\cdot R_\odot = 25\cdot\left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2 R_\odot$ (как было сказано ранее, расчёт светимости звезды согласуется с расчетами для Г.П.; $L = 5^4 L_\odot$)

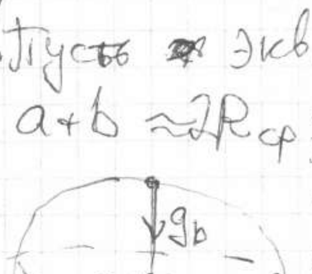
$R_{ср} = 25\cdot\left(\frac{5800\,K}{15\cdot 10^3\,K}\right)^2 R_\odot = \frac{25}{6,8} R_\odot \approx 3,6 R_\odot$

• Период вращения звезды:

$\tau = \frac{2\pi R_{ср}}{v} = \frac{2(\pi\cdot 3,6)\cdot 700\,000\,км}{200\,км/с} = 2\cdot 10 \approx 20^h$;

достаточно быстро, чтобы вращение явно сказалось на форме звезды (но не настолько, чтобы радиусы на экваторе и полюсе отличались в несколько раз, как, например, у Ахернара, период обр. которого $\approx$ 4-6 ч).

• Пусть экв. радиус звезды — a, полярный — b, $a+b \approx 2R_{ср}$; $a \approx R_{ср}$ (т.к. период мы считали по экватору)



. Звезда находится в динамическом равновесии (не сказано ничего про переменность). Учитывая, что давление излучения равномерно, ускорение звезды в каждой точке пов-сти одинаково: (по направлению к центру)

$a_b = a_a$; $\frac{GM}{b^2} = \frac{GM}{a^2} + \frac{v^2}{a}$; $\frac{GM(a^2-b^2)}{(a^2 b^2)} = \frac{v^2}{a}$ (см. лист 2)

Задача №2 (2ч.)

300 - 2/6

$$\cancel{\frac{GM}{(a-b)(a+b)} = \frac{v^2}{a}} \Rightarrow a-b=\Delta R = \frac{GM}{2v^2}$$

(в полюсе центробежная сила равна нулю)

$$\cancel{\Delta R = \frac{7\cdot10^{-11}\cdot 5M_\odot}{2\cdot(2\cdot10^{5}\,м)^2} = \frac{7\cdot5}{4}\cdot\frac{10^{19}}{10^{10}}}$$

$$\frac{GM(a^2-b^2)}{(ab)^2} = \frac{v^2}{a} \Rightarrow \frac{GM\,\Delta R\cdot 2R_{ср}}{R_{ср}^4} = \frac{v^2}{R_{ср}}$$

← площадь эллипса $\pi ab = \pi R_{ср}^2$

$$\Delta R = \frac{v^2 R_{ср}^3}{2GM} = \frac{4\cdot10^{10}\,\frac{м^2}{с^2}\cdot 13\cdot 49\cdot 10^{10}\,м^2}{7\cdot10^{-11}\cdot5\cdot2\cdot10^{30}\,\frac{м^3}{с^2}} = \frac{28\cdot13\cdot10^{20}}{2\cdot10^{20}}\,м$$

≈ 200 м.

№ 1 | 300 - 3/6

(секунд. угол)

• Максимально возможное угловое разрешение ~~возмож~~ — при базе, равной $D_\oplus$ — 12800 км.

$\rho_{min} = \frac{\lambda}{D}$ (рад), где λ — наблюдаемая длина волны

• Аберрационное смещение σ:

$\sigma = \frac{v}{c}\operatorname{tg}\theta$, где $\theta \approx 10^\circ$, т.к. Солнце не находится точно в плоскости диска Галактики.

$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sigma} = \frac{c}{v} \approx \frac{\theta}{\sigma}$ ввиду малости углов.

Примем радиус орбиты Солнца за $10\cdot10^3$ пк, массу галактики за $10^{12}M_\odot$, световой год — за $10\cdot10^{12}$ км (10 трлн)

Тогда $v_\odot = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{7\cdot10^{-11}\cdot10^{12}\cdot2\cdot10^{30}}{10\cdot10^3\cdot10\cdot10^{12}\cdot3{,}26\cdot10^3}}\ \frac{м}{с} =$

$= \sqrt{\frac{14\cdot10^{14}}{3{,}26\cdot10^3}} = \sqrt{40}\cdot10^5\ \frac{м}{с} = 6\cdot10^2\ \frac{км}{с} \approx 600\ \frac{км}{с} = \frac{c}{500}$

Тогда $\frac{\theta}{\sigma} = \frac{c}{v} = 500$, а $\sigma = \frac{10^\circ}{500} \approx 7''$

σ — большая полуось аберрационного эллипса центра Галактики за период $T \approx 2{,}5$ млрд. лет.

• Рассчитаем ρ_{max}. Т.к. наблюдения наземные, мы можем принимать только некоторые диапазоны волн, например близкий ультрафиолет и видимые волны, а также радиоволны. Чтобы ρ был минимальным, возьмём наименьшее ~~напр~~ $\lambda \approx 3000$ Å (близкий УФ):

$\rho_{min}(рад) = \frac{\overset{0,25}{\cancel{3}}\cdot\cancel{10^3}\cdot10^{-10}}{\cancel{12}\cdot\cancel{10^3}\cdot10^3\ м} \approx 2{,}5\cdot\cancel{10^{-13}}10^{-14}$ рад

$\rho_{min}('') = 2{,}5\cdot10^{-14}\cdot(206265) \sim 5\cdot10^{-9}\ ''$ ~~рад~~

За период T центр Галактики смещается на 2σ ($\overset{\sigma}{\leftrightarrows}$) => искомое $\tau = \frac{\rho_{min}}{2\sigma}\cdot T = \frac{5\cdot10^{-9}}{14}\cdot2{,}5\cdot10^9 \approx 1$ год.

№5. $\underline{|300-4/6}$

Спектральный класс звезды – G2, она находится на Г.П., что означает, что перед нами двойник Солнца ($M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R = 7 \cdot 10^5$ км), $T_\odot = 5800$ K

- Причин роста яркости может быть несколько.

1. Во-первых, у планеты может быть спутник. Тогда максимум блеска будет наблюдаться в соединении планеты со спутником.

2. Во-вторых, планета смогла закрыть собой тёмное пятно на звезде.

- Для начала найдём характеристики самой планеты. Т.к. расстояние до системы намного больше размеров звезды, считаем, что за $3^ч$ планета прошла расстояние $D + d (\approx D)$ диаметру звезды + планеты. Тогда её скорость равна

$$\vartheta = \frac{D}{3^ч} = 14 \frac{км}{с} = \frac{\vartheta_\oplus}{2} \Rightarrow a = 4 a_\oplus \quad \left(a \propto \frac{1}{\vartheta^2}\right)$$

$a = 4$ а.е. – (большая полуось) радиус орбиты планеты

- Определимся с версией:

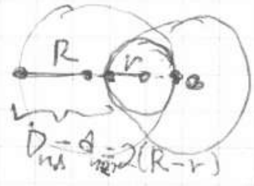
В варианте (1) спутник будет закрывать 1% площади звезды, а планета – 2%, т.е. размеры спутника будут в 10 раз меньше звезды и в $\approx 1{,}4$ раза меньше планеты. Размеры нереалистичны для спутника, а скорее похожи на планету-гиганта. ~~ни для планеты~~

Рассматриваем вариант 2.

Покрытие планетой пятна произошло в середине транзита, т.е. на одной линии с наблюдателем.

№5 (24) $\quad$ 300 − 5/6

За 2 минуты покрытия (когда планета полностью закрывала пятно) планета прошла расстояние $2(R_{пл} - r_{пятн.})$:



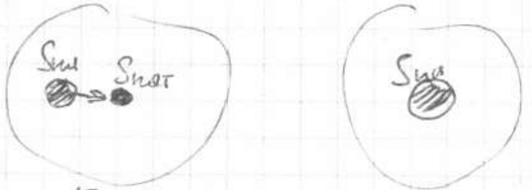
$$R - r = \frac{\cancel{2} D_\odot}{2} \cdot \frac{2^м}{3^ч} = \frac{\cancel{1{,}4}\, 7 \cdot 10^5 км}{3 \cdot 60} \approx \frac{7}{18} \cdot 10^4 =$$

≈ 5000 км $= \Delta r$ (тогда радиус пятна − r, планеты − $r + \Delta r$)

· В момент локального максимума $L = 0{,}98 L_\odot$

В этот момент вклад в потемнение звезды вносит только планета.

$$\frac{S_{пл}}{S_\odot} = \frac{\Delta L}{L_\odot} = 0{,}02,$$



откуда $R_{пл} = \frac{R}{\sqrt{50}} \approx \frac{R}{7} = 10^5$ км,

а $r = 95$ тыс. км, причем $\frac{S_{пятна}}{S_{планеты}} = \left(\frac{9{,}5}{10}\right)^2 \approx 0{,}9$.

Если бы пятно было абсолютно тёмным, оно вносило бы вклад в 1,8%, но на деле мы видим всего 98% − 97% = 1%. Это означает, что пятно тоже излучает. Найдем его температуру.

$L_{пятна} = 0{,}008 L_\odot$ (0,8%)

$$L_\odot = 125 L_п \Rightarrow \frac{L_\odot}{L_п} = \left(\frac{R_\odot}{R_п}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_\odot}{T_п}\right)^4$$

$$125 = (7{,}4)^2 \cdot \left(\frac{T_\odot}{T_п}\right)^4 = 55\left(\frac{T_\odot}{T_п}\right)^4 \Rightarrow T_п = \sqrt[4]{\frac{11}{25}} \cdot 5800 К$$

$$\approx \sqrt[4]{\frac{1}{\underset{(\approx 2{,}25)}{2{,}3}}} \cdot 5800 \approx \sqrt{\frac{1}{\underset{(\approx 1{,}44)}{1{,}5}}} \cdot 5800 К = \frac{5800 К}{1{,}2} \overset{(4830)}{\approx} 5000 К.$$

Итак, получаем характеристики пятна:

$r = 95$ тыс. км, $T = 5000$ К $\approx (4830)$

№4.

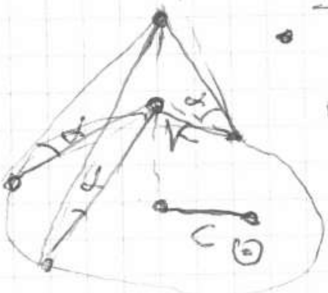
300 - 6/6

• Характеристики орбиты: малая полуось $b = 0{,}2$ а.е., перицентр $q = 0{,}1$ а.е., апоцентр $Q = 0{,}4$ а.е.

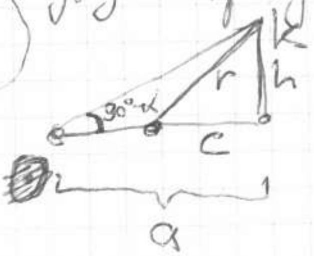
Спутники располагаются друг от друга на угловом расстоянии ~ 18°.

• Если опорная звезда находится не в полюсе эклиптики, её эклиптическая долгота относительно ~~разных~~ кометы с разных КА будет меняться (при повороте вокруг кометы опорная звезда будет „вращаться" вокруг неё) ⟹ Экл. широта ±30°

А чтобы угол был всегда равен $\alpha = 33°$, комета должна быть размещена ~~перпендикулярно~~ на оси симметрии эллипса (см. рис.).



• Тогда расстояние от Солнца до кометы можно определить из двух треугольников:



$h = a \cdot tg(90° - \alpha) = a\,tg(60°) = a\sqrt{3}$

$r = \sqrt{h^2 + c^2} = \sqrt{3a^2 + e^2a^2} = \sqrt{3{,}36a^2} \approx 0{,}25 \cdot 1{,}8$ а.е. $= 0{,}45$ а.е.

№3.

Энергия фотона $E = h\nu = 8 \cdot 10^2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}28 \cdot 10^{-17}$ Дж.