№1.

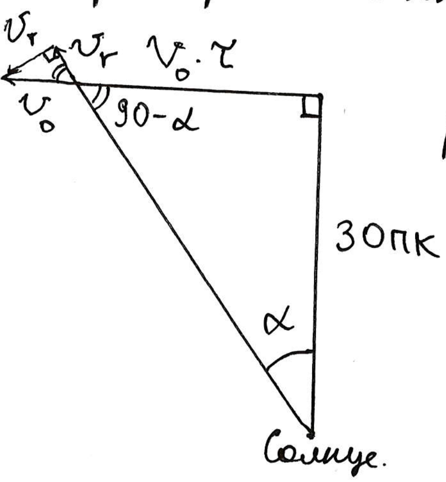
$V_\tau = 4{,}74\,\mu r$ – тангенциальная скорость звезды.

$V_0 = \sqrt{V_\tau^2 + V_r^2}$ – полная скорость звезды.

Т.к. $V_r = 0$, то $V_0 = V_\tau$.

(V_τ – тангенциальная скорость; V_r – радиальная скорость.)

$V_0 = 4{,}74 \cdot 0{,}5 \cdot 30 = 2{,}37 \cdot 30 = 71{,}1 \approx 71$ км/с. – полная пространственная скорость звезды относительно Солнца.



За 100 лет звезда пройдёт расстояние равное r:

$$r = V_0 \cdot \tau = 71 \cdot 100 \cdot 3600 \cdot 365 \cdot 24 = 71 \cdot 3{,}15 \cdot 10^7 \cdot 100 \text{ км}$$

$$r = 223{,}65 \cdot 10^9 \text{ км} \approx 2{,}2 \cdot 10^{11} \text{ км} = 1{,}47 \cdot 10^3 \text{ а.е.}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1{,}47 \cdot 10^3}{30 \cdot 206265} \Rightarrow \text{т.к. } \operatorname{tg}\alpha \ll 1, \text{ то } \alpha \ll 1$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$$

$$\alpha = \frac{1{,}47 \cdot 10^3}{30 \cdot 206265} \text{ рад}$$

$$V_r = V_0 \cdot \sin\alpha \approx V_0 \cdot \alpha = 71 \cdot \frac{1{,}47 \cdot 10^3}{30 \cdot 206265} = 2{,}37 \cdot \frac{1{,}47 \cdot 10^3}{206265} \approx \frac{1}{60} \text{ км/с.}$$

Доплеровское смещение:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V_r}{c} \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda \frac{V_r}{c}$$

Лучевую скорость можно обнаружить, если доплеровское смещение больше точности спектрометра.

Оптический диапазон: $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7} = 5000$ Å

$$\Delta\lambda = 5000 \cdot \frac{1}{60 \cdot 300000} = \frac{5}{18 \cdot 10^3} \ll 0{,}1 \text{ Å} \Rightarrow \text{невозможно.}$$

Ответ: $\boxed{\text{нет}}$, нельзя обнаружить лучевую скорость у звезды через 100 лет со спектрометром с точностью 0,1 Å.

ШИФР: 163. ЛИСТ: 2 из 7

№2.

Гравитационное ускорение:

$$\frac{GM}{R^2} = 0{,}7\ м/с$$

Светимость: $(M_\odot \approx 4{,}7^m)$ Найдя светимость, мы сможем оценить радиус звезды.

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{0{,}4(M_\odot - M)} = 10^{0{,}4\cdot(4{,}7+0{,}6)} \approx 10^2$$

$L = 100 L_\odot$ – светимость звезды.

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma T^4}{4\pi R_\odot^2 \cdot \sigma T_\odot^4} = \frac{R^2 T^4}{R_\odot^2 T_\odot^4} = 100$$

$$\frac{RT^3}{R_\odot T_\odot^2} = 10 \Rightarrow R = R_\odot \cdot \frac{10 \cdot 5800^2}{3400^2} = 10 R_\odot \cdot \frac{58^2}{34^2} = 29 R_\odot$$

Оценим массу звезды:

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G} = \frac{0{,}7\cdot 29^2 \cdot 7^2 \cdot 10^{16} \cdot 10^{11}}{6{,}67} \approx 4{,}1\cdot 10^{30}.$$

$$\boxed{M \approx 2M_\odot}$$

Перицентр планеты не может находиться внутри звезды, поэтому граничное условие: $q = 29 R_\odot$

III закон Кеплера:

73 сут $= \frac{1}{5}$ года.

$$T^2 M = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{T^2 M} = \sqrt[3]{\frac{2}{25}} =$$

$a \approx 0{,}43$ а.е.

$R_\odot \approx \frac{1}{200}$ а.е.;

$$q = a(1-e)$$

$$1-e = \frac{q}{a} = \frac{29\cdot\frac{1}{200}}{0{,}45} \qquad 1-e = \frac{29\cdot 100}{200\cdot 43} = \frac{29}{86}$$

$$e = 1 - \frac{29}{86} = \left(\frac{57}{86}\right) = 0{,}6[illegible]64$$

Ответ: $\boxed{e_{MAX} = 0{,}66}$

более аккуратные расчёты на стр. 7.

№3.

Если мы наблюдаем с Земли, то мы не можем пренебрегать влиянием атмосферы. Атмосферное дрожание равно 1", значит, чтобы диск Антареса был больше 1", его угловой размер должен быть больше 1". В противном случае его угловой размер будет равен 1".

Расстояние до Антареса - это сотни парсек. Оценим это расстояние в 600пк.

Предельный случай: $\alpha = 1''$:

$$\alpha = 1'' = \frac{1}{206265} рад = \frac{D[пк]}{600[пк]} = \frac{D [а.е.]}{600 \cdot 206265 [а.е.]}$$

$$D = 600 \cdot \frac{206265}{206265} а.е. = 600 а.е.$$ ⇒ Диаметр звезды в а.е. будет равен расстоянию до звезды в п.к. Очевидно, что звёзд с радиусами в несколько сотен а.е. не бывает.

Значит, угловой размер Антареса равен 1" из-за атмосферного дрожания. В пользу такой оценки также и само условие задачи. Антарес (α Sco) - двойная звезда, состоящая из оранжевой и голубой компонент, у неё не может быть единого диска, если помехи в атмосфере позволяют её разрешить.

Ответ: $\alpha = 1''$ - угловой размер диска Антареса при наблюдении с Земли.

№4.

Так как большая полуось орбиты астероида не сильно отличается от Земной и его синодический период (время между двумя сближениями с Землёй, т.е. между противостояниями Земли с астероида) велик, то он обращается вокруг Солнца в ту же сторону, что и Земля.

Т.к. полуось орбиты астероида меньше полуоси орбиты Земли, его период также меньше Земного.

(продолжение №4)

Синодическое уравнение:

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{T}-\frac{1}{T_\oplus}$$

По условию, синодический период равен:

$S = 2097 - 2003 + 0{,}5 = 94{,}5$ года.

$$\frac{1}{94{,}5}=\frac{1}{T}-\frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{T}=\frac{1}{94{,}5}+1=\frac{955}{945}$$

$$T=\frac{945}{955}\text{ года}=\frac{189}{191}\text{ года}=1-\frac{2}{191}\text{ года.}$$

Для Солнечной Системы можно использовать упрощенный III закон Кеплера:

$$T^2=a^3 \Rightarrow a=T^{\frac{2}{3}}=\left(1-\frac{2}{191}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Для малых Δx с хорошей точностью действует формула:

$$(1-\Delta x)^{\alpha}=1-\alpha\Delta x$$

Т.к. $\frac{2}{191} << 1$, то можно использовать эту формулу.

$$a=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{191}=1-\frac{4}{3\cdot 191}=1-0{,}00698\ldots\approx 1-0{,}007$$

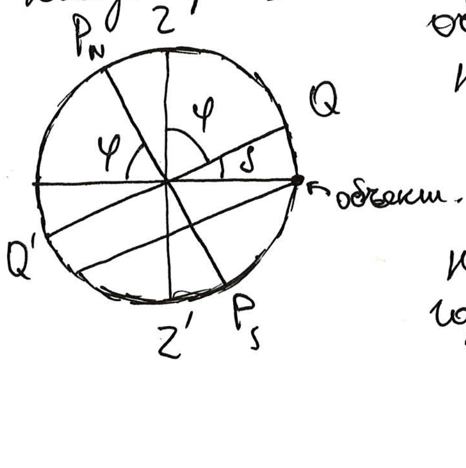
← достаточная точность 0,001 а.е.

$a = 0{,}99302 \approx 0{,}993$ а.е.

Ответ: $a = 0{,}993$ а.е. — большая полуось орбиты астероида.

N5.

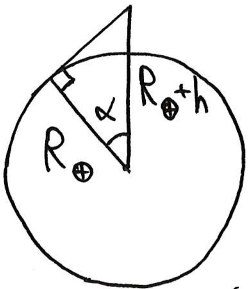
Для Аркадия объект находится над точкой юга, значит он в верхней кульминации. (Аркадий в северном полушарии). Если в верхней кульминации высота объекта равна нулю, то его склонение южное и равно по модулю $90-\varphi$.



$$\delta=-(90-\varphi)=-28^\circ.$$

Василий наблюдает на горе, поэтому необходимо учитывать понижение горизонта.

(продолжение N5).



$$\cos\alpha = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}$$

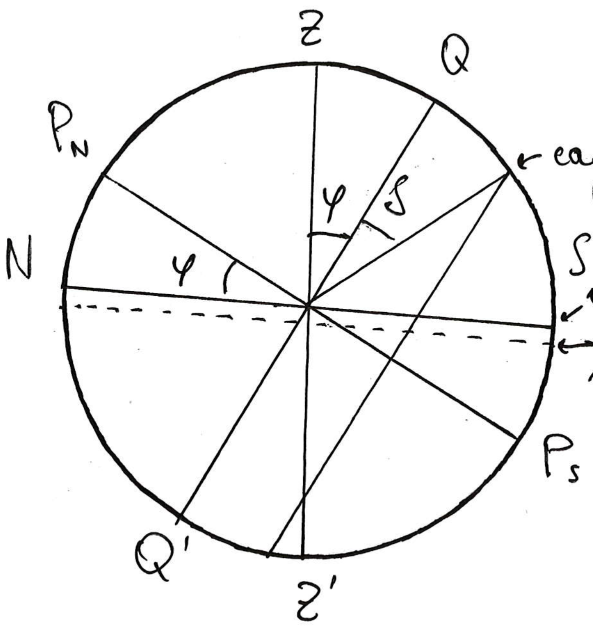
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{R_\oplus^2}{(R_\oplus+h)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{7208}\right)^2}}$$

Угол α малый $\Rightarrow \alpha \approx \sin\alpha$.

$$\left(1+\frac{1}{7208}\right)^2 \approx 1 + \frac{2}{7208}, \text{ т.к. } \frac{1}{7208^2} \to 0.$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{1+\frac{2}{7208}}} = \sqrt{1 - \frac{7208}{7208+2}} = \sqrt{\frac{7208+2-7208}{7208+2}} = \sqrt{\frac{2}{7208+2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{7210}} = \sqrt{\frac{1}{3605}} \approx \frac{1}{60}\text{ рад} = 0{,}955° \approx 1°.$$



← самое верхнее положение объекта.

← горизонт на расстоянии 90° от зенита.

← видимый горизонт

$h = h_0 + \alpha$ − высота объекта над видимым горизонтом складывается из его высоты над обычным горизонтом (не опущенным), и ~~[illegible]~~ угла опускания горизонта.

$$h_0 = 90 - \varphi + \delta$$

$$h_0 = 90 - 44 + (-28)$$

$$h_0 = 90 - 72 = 18°$$

Высота в верхней кульминации − это самое высокое положение объекта над стандартным горизонтом. Так как опущение горизонта − это константа, прибавляемая к h_0, то в верхней кульминации и высота над видимым горизонтом будет ~~[illegible]~~ наибольшей:

$$h_{MAX} = h_0 + \alpha = 18{,}955° \approx 19°.$$

Василий находится восточнее Аркадия, значит видит те же события, что и Аркадий раньше.

звёздные сутки.

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\lambda}{360} \cdot 23{,}943 = \frac{43-31}{360} \cdot 23{,}943 = \frac{12}{360} \cdot 23{,}943 = \frac{23{,}943}{30} \approx 0{,}798\text{ч}$$

(продолжение №5).

$\Delta\tau = 0,798ч = 47,9 мин \approx 48 мин.$

~~Ответ: $h_{MAX} = 18,955^\circ \approx 19^\circ$ максимальная высота объекта над видимым горизонтом на горе Верблюд~~

Однако на этой широте объект будет виден не только в верхней кульминации, поэтому время надо отсчитывать от его восхода.

Часовой угол восхода без опущения горизонта:

$$-\cos\tau = \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\varphi = -\frac{3,5}{6,7}\cdot 1 \; \cancel{0,142} \approx -0,5$$

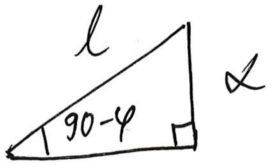
(cos, tg измерим по окружности.)

~~$\cos\tau = 0,142 = \sin(90-\tau)$~~

~~т.к. 0,142 мало, то $90^\circ-\tau \approx 0,142$ рад~~

$\cos\tau = 0,5 \Rightarrow \tau = 60^\circ \Rightarrow \Delta\tau_0 = \frac{60}{15} = 4$ часа ← от стандарт. гориз. до

Также объект проходит над горизонтом т.к. расстояние l, обусловленное опущением горизонта:



$$l = \frac{\alpha}{\sin 90-\varphi} = \sqrt{2}\,\alpha = 1,4^\circ.$$

Скорость продвижения по сфере равна:

$$\omega = 15^\circ/час \cdot \cos 2\delta \approx 15^\circ/час \cdot \cos 30^\circ = 13^\circ/час.$$

$$\Delta\tau_1 = \frac{l}{\omega} = \frac{1,4}{\omega} = \frac{1,4}{13}ч \approx 0,1ч.$$

Суммарная разница во времени:

$$\tau_0 = \Delta\tau + \Delta\tau_0 + \Delta\tau_1 = 0,8 + 4 + 0,1 = 4,9ч.$$

Ответ: $h_{MAX} = 18,955^\circ \approx 19^\circ$ - максимальная высота объекта над видимым горизонтом на горе Верблюд

$\tau_0 = 4,9$ часа - на столько раньше Василий увидит объект.

продолжение № 2

более аккуратный расчёт большой полуоси и последующие вычисления:

$73 \text{ сут} = \frac{1}{5}$ года.

$T^2 M = a^3$ – с помощью III закона Кеплера сравниваем систему с Солнцем и Землёй.

$a = \sqrt[3]{T^2 M}$; $M = 2M_\odot$

$a = \sqrt[3]{\frac{2}{25}} = \sqrt[3]{\frac{10}{125}} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{10} \approx 0{,}2 \cdot 2{,}15 \simeq 0{,}43$ а.е.

перицентр: $q = a(1-e)$; радиус Солнца: $R_\odot = \frac{1}{200}$ а.е.

$1 - e = \frac{q}{a} = \frac{29 \cdot \frac{1}{200}}{0{,}43} = \frac{29}{86} \Rightarrow e = \frac{86-29}{86} = \frac{57}{86} \approx 0{,}664$

Ответ: $e_{MAX} = 0{,}664 \approx 0{,}66$.– максимально возможный эксцентриситет планеты.