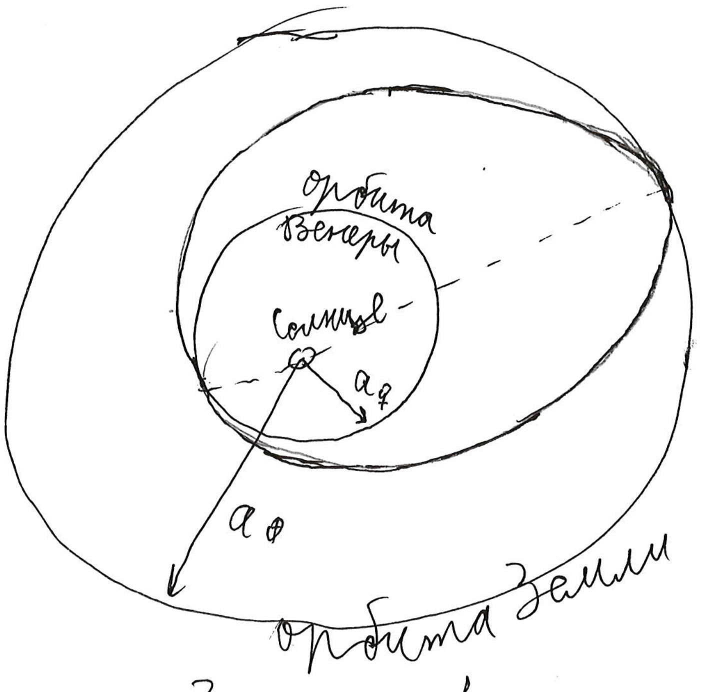
Задача 1.

12 февраля 1961 года - станция запущена к Венере.

Радиус орбиты Венеры $a_♀ = 0,72$ а.е, Земли - $a_⊕ = 1$ а.е.

Сделаю рисунок.



Найдём большую полуось этой орбиты (её перицентр $q = a_♀ = 0,72$ а.е, а апоцентр $Q = a_⊕ = 1$ а.е):

$$\boxed{a = \frac{q+Q}{2} = \frac{1,72}{2} = 0,86 \text{ а.е.}}$$

Тогда по III Закону Кеплера период обращения станции:

$$\frac{T^2}{T_⊕^2} = \frac{a^3}{a_⊕^3} \Rightarrow T(\text{в годах}) = \sqrt{a(\text{в а.е.})^3}$$

период Земли

$$\boxed{T = \sqrt{0,86^3} \approx \sqrt{0,64} = 0,08 \text{ лет}}$$

$$\begin{array}{r} 0,86 \\ \times\ 0,86 \\ \hline 516 \\ +\ 688 \\ \hline 0,7396 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,7396 \\ \times\ 0,86 \\ \hline 44376 \\ +\ 59168 \\ \hline 0636056 \end{array}$$

$0,636056 \approx 0,64$

Этот спутник (станция) долетит до Венеры через $\frac{1}{2}T$.

$\frac{1}{2}T \approx 0{,}4$ года ≈ 91 день

То есть станция пролетит рядом с Венерой через 91 день после 12 февраля →

→ это примерно ~~15 апреля~~ 15 мая.

12 февраля $\xrightarrow{16\ \text{дней}}$ 1 марта $\xrightarrow{31\ \text{день}}$ 1 апреля $\xrightarrow{30\ \text{дней}}$ 1 мая

$16+31+30=77$ дней

$91-77=14$ дней $\Rightarrow \approx 14-15$ мая

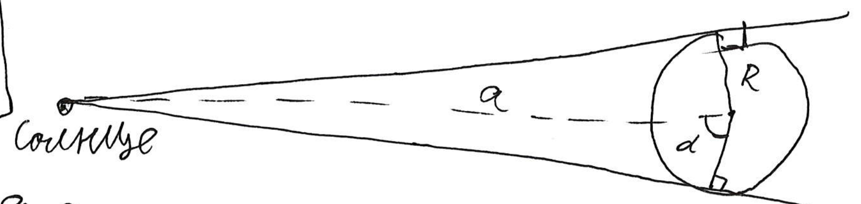
Ответ: станция пролетит рядом с Венерой примерно 14-15 мая

Задача 2.

$v = 3\ \frac{км}{ч}$
$D = 600\ км \Rightarrow R = 300\ км$
$T_{орб} = 4\ года$
$T_{осв} = 4\ сут$
$\frac{\ell}{\ell_{экв}} = ?$
начинает из середины освещённого полушария

1.) Орбитальный период слишком велик, чтобы влиять на расположение тени. - радиус орбиты по 3 закону Кеплера

$a \approx \sqrt[3]{4^2} \approx 2,1\ а.е.$



Т.к. $a >> R \Rightarrow \alpha \approx 90°$.

2.) Найдём угловую скорость вращения астероида и движения аппарата.

$\omega_{аст} = \frac{2\pi}{T_{осв}} \approx \frac{6,3\ rad}{4\ сут} \approx 1,57\ \frac{rad}{сут}$

$$\begin{array}{r|l} 6,30 & 4 \\ -4 & 1,57... \\ 23 & \\ -20 & \\ 30 & \\ -28 & \\ \vdots & \end{array}$$

$\omega_{апп} = \frac{2\pi}{2\pi R / v} = \frac{v}{R} = \frac{2v}{D} =$

$= \frac{2 \cdot (24 \cdot 3)\frac{км}{сут}}{600\ км} = \frac{24}{100}\ \frac{rad}{сут} = 0,24\ \frac{rad}{сут}$

3.) 1-й случай. Аппарат и астероид ~~дви~~ движутся в одном направлении.

Тогда t - время, через которое аппарат войдёт в тень.

$t = \frac{\pi/2}{\omega_{аст} + \omega_{апп}} \approx \frac{3,14}{2 \cdot (1,57 + 0,24)} = \frac{3,14}{2 \cdot 1,81} = \frac{3,14}{3,62} \approx \frac{31,4}{36} \approx 0,87\ сут$

* $\frac{\pi}{2} = 90°$ - угол от центра освещ. части до тени

$$\begin{array}{r|l} 31,400 & 36 \\ -288 & 0,87 \\ 260 & \\ -252 & \\ 8 & \end{array}$$

Тогда расстояние, пройденное аппаратом $l = 0{,}87 \text{сут} \cdot 3 \cdot 24 \frac{\text{км}}{\text{сут}} \approx 62{,}6 \text{ км}$

$$\begin{array}{r} \times\ 0{,}87 \\ 72 \\ \hline 174 \\ +\,609\ \ \\ \hline 62{,}64 \end{array}$$

4.) 2-й случай – они движутся в разные стороны.

$$t = \frac{\pi/2}{\omega_{ает} - \omega_{апп}} = \frac{3{,}14}{2\cdot(1{,}57-0{,}24)} = \frac{3{,}14}{2\cdot 1{,}33} = \frac{3{,}14}{2{,}66} \approx 1{,}16 \text{ сут}$$

$$\begin{array}{r|l} 31{,}400 & 27 \\ \hline -27\ \ \ \ & 1{,}16 \\ 44\ \ \ & \\ -27\ \ \ & \\ \hline 170\ \ & \\ -162\ \ & \\ \hline 8\ \ & \end{array}$$

За это время он прошёл расстояние

$l = 1{,}16 \cdot 3 \cdot 24 = 83{,}52$ км

$$\begin{array}{r} \times\ 1{,}16 \\ 72 \\ \hline 232 \\ 812\ \ \\ \hline 83{,}52 \end{array}$$

Ответ: если $\rightleftarrows$ (аст. и аппарат движутся в одну сторону), то $l = 62{,}6$ км, если в разные, то $l = 83{,}5$ км

Задача 4.

Юпитер-123 → $a_1 = 8$ а.е. (T_1)

Сатурн-123 → $a_2 = 12$ а.е. (T_2)

Земля-123 → $a_3 = ?$ $T_3 = 2$ года

Местное Солнце → $M = 1{,}2 M_\odot$

Найдём все полуоси и периоды из III обобщённого закона Кеплера (считая массы всех планет ≪ массы звезды):

$$\frac{T_3^2 \cdot 1{,}2 M_\odot}{T_\oplus^2 \cdot M_\odot} = \frac{a_3^3}{a_\oplus^3} \Rightarrow \sqrt[3]{\underset{\text{в годах}}{T_3^2} \cdot 1{,}2} = a_3 \text{ (в а.е.)}$$

$T_\oplus$ – период Земли; $a_\oplus$ – большая полуось Земли

$$a_3 = \sqrt[3]{2^2 \cdot 1{,}2} = \sqrt[3]{4{,}8} \approx 1{,}7 \text{ а.е.}$$

$(1{,}7^2 = 2{,}89;\ 1{,}7^3 \approx 4{,}9)$

Аналогично:

$$T_1 = \sqrt{\frac{8^3}{1{,}2}} = \sqrt{\frac{64 \cdot 8}{4 \cdot 0{,}3}} = \sqrt{\frac{1280}{3}} \approx \sqrt{400} = 20 \text{ лет}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{12^3}{1{,}2}} = \sqrt{12^2 \cdot 10} = 12 \cdot \sqrt{10} \approx 38 \text{ лет}$$

Найдём синодические периоды Земли-123 с Юпитером-123 и Сатурном-123 (для каждой планеты 2 случая – вращение в одном направлении и в разных):

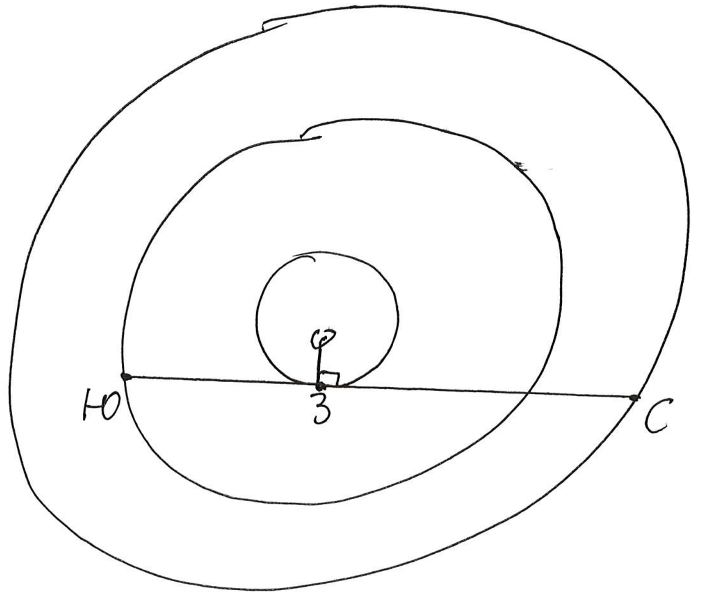
$$S_{З-Ю1} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{20}} = \frac{20}{9} \approx 2{,}22 \text{ года} \quad (1)$$

$$S_{З-Ю2} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{20}} = \frac{20}{11} \approx 1{,}8 \text{ года} \quad (2)$$

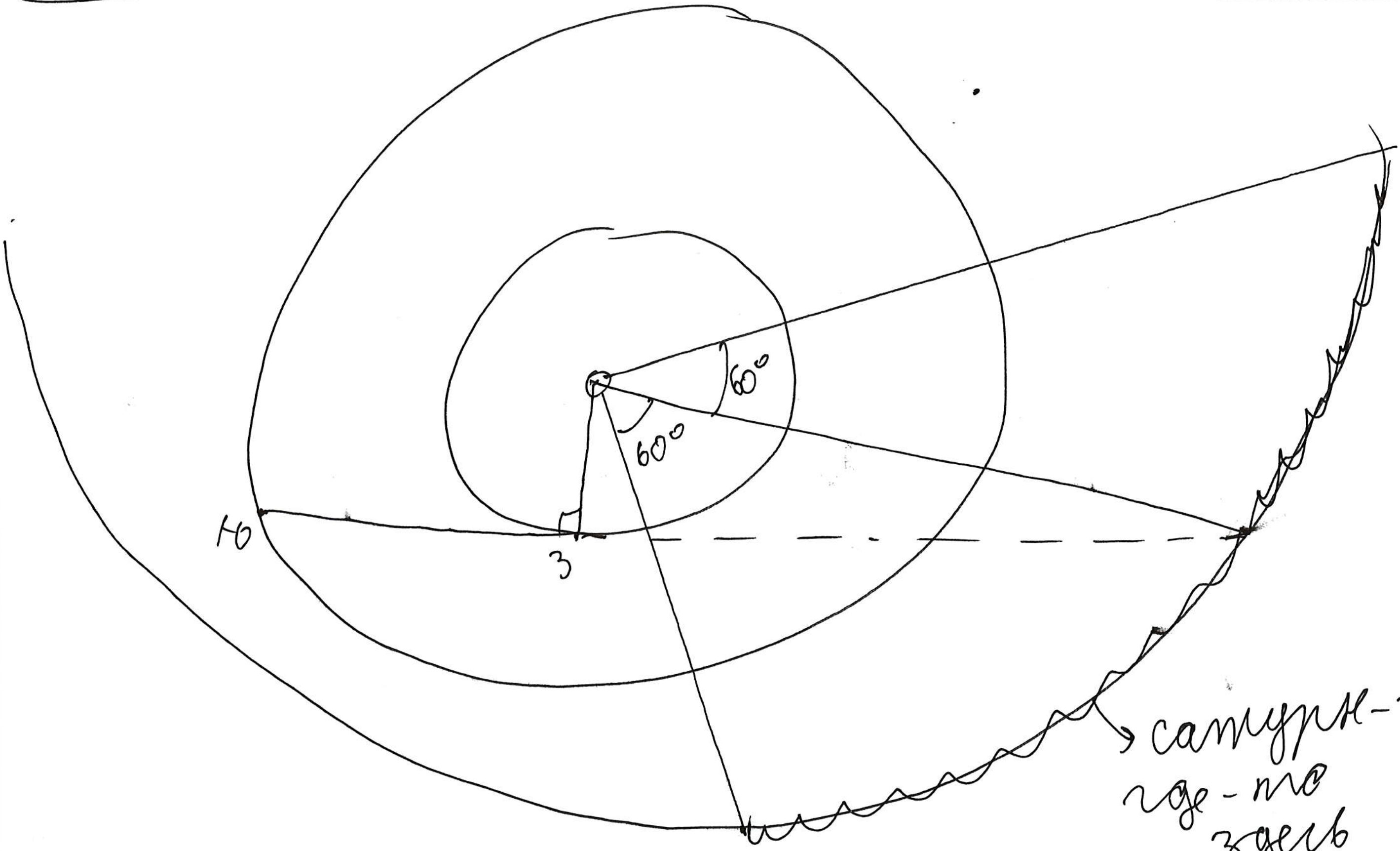
$$S_{З-С1} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{38}} = \frac{38}{18} = \frac{19}{9} \approx 2{,}1 \text{ года} \quad (3)$$

$$S_{З-С2} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{38}} = \frac{38}{20} = \frac{19}{10} \approx 1{,}9 \text{ года} \quad (4)$$

Так как в полдень планеты были в разных точках неба, они в квадратурах:



Из-за разных случаев с S, появляются 4 случая.
Но во всех случаях разница в синодических периодах невелика — <0,3 года (что немного по сравнению с S) → 0,3 года создают поправку в $\pm 60° \to \frac{0{,}3}{1{,}8} \cdot 360° = 60°$



Но в любом случае при таком расположении сатурн-123 будет виден ночью.

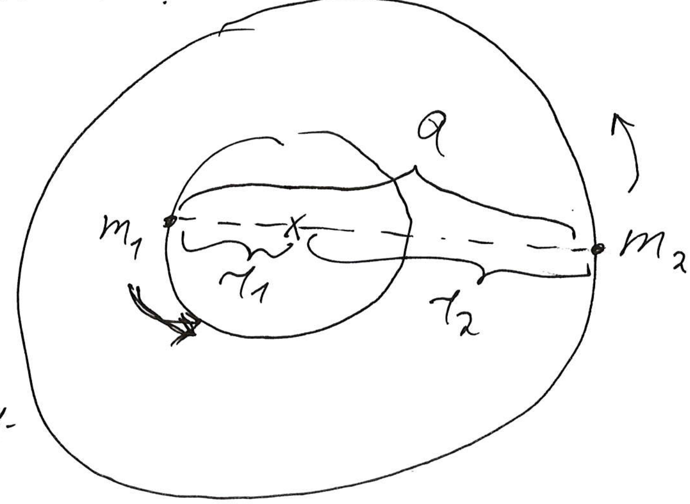
Ответ: да, он будет виден ночью

Задача 5.

$\tau_{зат} = 88\ ч$

$\Delta m = 0{,}75^m$

$M_\Sigma = 1{,}8\ M_\odot$



Сила гравитационного вз-я звёзд - ~~...~~ их центростремительная сила.

$$\frac{G m_1 m_2}{a^2} = \underbrace{\frac{m_1 4\pi^2 r_1^2}{T^2 \cdot r_1} = \frac{m_1 4\pi^2 r_1}{T^2}}_{1\text{-я звезда}} = \underbrace{\frac{m_2 4\pi^2 r_2^2}{T^2 r_2} = \frac{m_2 4\pi^2 r_2^2}{\cancel{r_2} T^2}}_{2\text{-я звезда}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m_1 r_1 = m_2 r_2} \Rightarrow m_1 = \frac{r_2}{r_1} m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{\frac{r_2}{r_1} m_2}{m_2\left(\frac{r_1+r_2}{r_1}\right)} = \frac{r_2}{r_1+r_2} = \frac{r_2}{a}$$

$$\frac{G m_1 m_2}{a^2} = \frac{m_1 4\pi^2 r_1}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 r_1}{G m_2} = \frac{4\pi^2 a^2 r_2}{G m_1}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 r_2}{G(m_1+m_2)\frac{r_2}{a}} = \frac{4\pi^2 a^3}{G M_\Sigma} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G M_\Sigma}}}$$

Так как затмения случаются каждые 38 часов, полный период системы $T = 2\tau_{зат} = 176\ ч \approx 7{,}33\ сут$

$$\boxed{\text{Тогда } a = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_\Sigma}{4\pi^2}}}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 G \cdot 1{,}8 M_\odot}{4\pi^2}}$$

Из периода Земли: $T_\oplus^2 = 4\pi^2 \frac{a_\oplus^3}{GM_\odot} \Rightarrow$

$$\Rightarrow GM_\odot = \left(\frac{T_\oplus^2}{4\pi^2 a_\oplus^3}\right)^{-1} = \frac{4\pi^2 a_\oplus^3}{T_\oplus^2}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{1{,}8 T^2 GM_\odot}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}8T^2}{4\pi^2} \cdot \frac{4\pi^2 a_\oplus^3}{T_\oplus^2}} = \sqrt[3]{1{,}8\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2} a_\oplus$$

$$a = a_\oplus \sqrt[3]{1{,}8 \cdot \left(\frac{7{,}33}{365}\right)^2}.$$

$$\frac{7{,}33}{365} \approx \frac{22}{3 \cdot 360} = \frac{22}{1080} \approx \frac{22}{1100} = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

$$a = a_\oplus \sqrt[3]{1{,}8 \cdot 0{,}0004} = a_\oplus \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 180}{10^6}} = \frac{a_\oplus}{100} \sqrt[3]{4 \cdot 180} =$$

$$= \frac{a_\oplus}{50} \sqrt[3]{90} \approx a_\oplus \cdot \frac{4{,}5}{50} = 0{,}09 a_\oplus$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 4{,}5^2 = 20{,}25 \\ 4{,}5 \cdot 20{,}25 \approx 91{,}3 \end{array}}$$

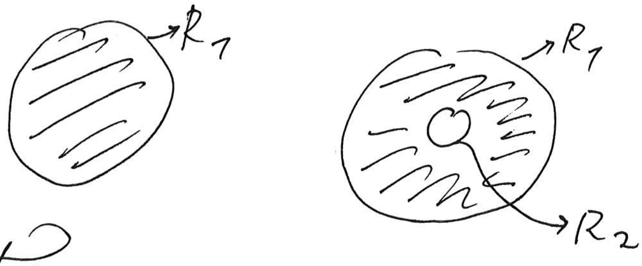
То есть большая полуось системы

$$\boxed{a_\oplus = 0{,}09 \text{ а.е.}}$$

Пусть радиус одной из звёзд = R_1, а её температура = T_1, для второй – R_2 и T_2.

Пусть $R_1 > R_2 \Rightarrow$ первая полностью покрывает вторую.

Т.к. падение блеска в обоих затмениях одинаково:



По закону Стефана-Больцмана:

$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ (Вт)

Пусть $4\pi \sigma T^4 = K$

Тогда:

$\cancel{K_1 R_1^2} = K_1(R_1^2 - R_2^2) + K_2 R_2^2$ $(\Delta m_1 = \Delta m_2)$

при этом я пренебрегаю расстоянием между звёздами, т.к. расстояние от них до Земли $l >> a = 0{,}09$ а.е.

$K_1 R_2^2 = K_2 R_2^2$

$\Downarrow$

$K_1 = K_2 \Rightarrow \boxed{T_1 = T_2}$

Итак, у звёзд одинаковая температура. $T_1 = T_2 = T$.

Так как разница звездных величин $\Delta m = 0{,}75^m$, то: 1.) m_1 – зв. вел. 1-й звезды 2.) m_2 – зв вел. 2-й звезды 3.) m_Σ – суммарная звёздная величина системы т.к. покрывается вторая звезда

$$\Delta m = 0{,}75^m = -2{,}5\log\frac{\Delta E}{E_\Sigma} = -2{,}5\log\frac{E_2}{E_\Sigma} = -2{,}5\log\left(\frac{L_2}{L_\Sigma}\right)$$

$$10^{-0,3} = \frac{L_2}{L_\Sigma} = \underbrace{\frac{4\pi R_2^2\sigma T^4}{4\pi\sigma T^4(R_1^2+R_2^2)}}_{\text{т.к. температуры звёзд одинаковы}} = \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2}$$

$$10^{-0,3} \approx \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{10}} \approx \frac{1}{2{,}2}}_{} = \frac{10}{22} \approx 0{,}45$$

$2{,}2^2 = 4{,}84$

$2{,}2^3 = 10{,}648 \approx 10$

$$\begin{array}{r} 4{,}84 \\ \times\quad 2{,}2 \\ \hline 968 \\ +\,968 \\ \hline 10{,}648 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10{,}00 & 22 \\ \cline{2-2} -88 & 0{,}45\ldots \\ \cline{1-1} 120 & \\ -110 & \\ \cline{1-1} 10 & \\ \ldots & \end{array}$$

То есть:

$$0{,}45 = \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \Rightarrow 0{,}45R_1^2 = 0{,}55R_2^2 \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^5 = \frac{55}{45} = \frac{11}{9} \approx 1{,}2$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{55}{45}} = \sqrt{\frac{11}{9}} \approx \sqrt{1{,}2} \approx 1{,}1$$

Значит:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{4\pi\sigma R_1^2 T^4}{4\pi\sigma R_2^2 T^4} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{11}{9} \approx 1,22$$

Если предположить, что звёзды находятся на главной последовательности, то:

$$L \sim M^4$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \sqrt[4]{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt[4]{1,22} \approx \sqrt{1,1} \approx 1,05$$

$$M_1 = 1,05 M_2$$

$$M_1 + M_2 = 1,8 M_\odot = 2,05 M_2$$

$$M_2 = \frac{1,8}{2,05} M_\odot \approx 0,9 M_\odot$$

$$M_1 \approx 0,9 M_\odot$$

Звёзды такой массы, скорее всего, жёлтые карлики.

Ответ: 1.) $a = 0,09$ а.е. 2.) $M_1 \approx M_2 \approx 0,9 M_\odot$
3.) они обе жёлтые

Задача 3.

Астероид приближается к Марсу на минимальное расстояние раз в 2 марсианских года.

Найдём период обращения астероида, т.к. 2 марсианских года - его синодический период с Марсом.

* м.г. ≡ марсианский год.

$$\frac{1}{2\text{м.г.}} = \frac{1}{\underbrace{1\text{м.г.}}_{\text{период Марса}}} - \frac{1}{T_{аст}} \Rightarrow \boxed{T_{аст} = 2\text{м.г.}}$$

Причём очевидно, что астероид и Марс не могут двигаться в противоположных напр-х, т.к. иначе $T_{аст} < 0$.

По III закону Кеплера найдём большую полуось астероида:

$$\frac{T_{аст}^2}{\underbrace{T_{♂}^2}_{\text{период Марса}}} = \frac{a_{аст}^3}{a_{♂}^3} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4 \Rightarrow a_{аст} = \sqrt[3]{4}\, a_{♂} \approx 1{,}6\, a_{♂}$$

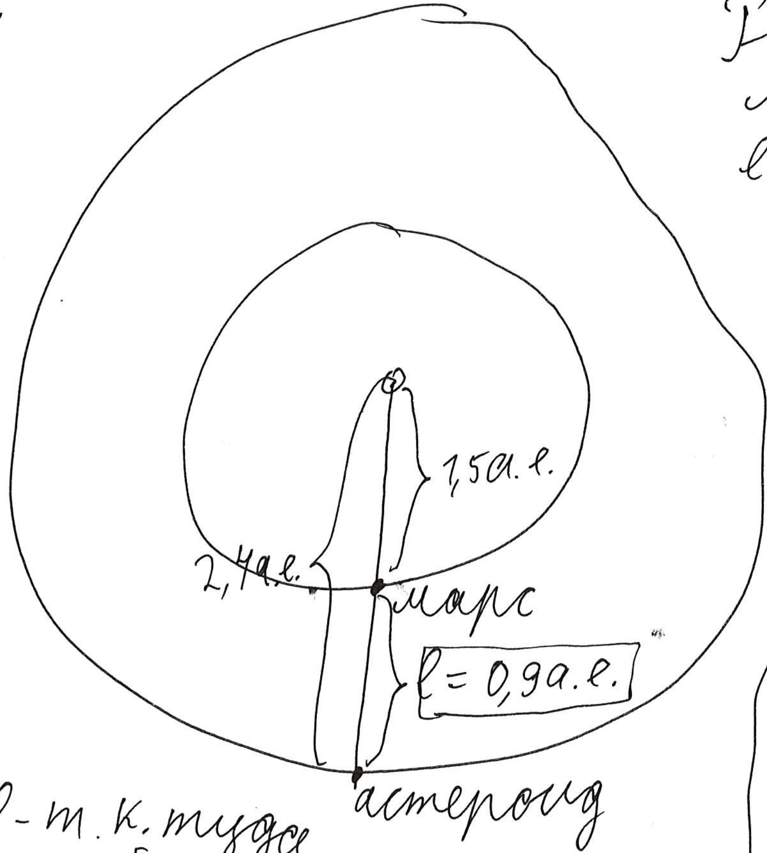
Большая полуось Марса $a_{♂} = 1{,}5$ а.е.

$\Downarrow$

$$\boxed{a_{аст} \approx 1{,}6 a_{♂} = 2{,}4 \text{ а.е.}}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}6 \\ \times\ 1{,}6 \\ \hline 96 \\ 16\ \\ \hline 2{,}56 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}56 \\ \times\ 1{,}6 \\ \hline 1536 \\ 256\ \\ \hline 4{,}096 \end{array} \approx 4$$

Минимальное расстояние - когда Марс и астероид в противостоянии:



Расстояние между ними $l = 2,4 - 1,5 = 0,9$ а.е.

Значит сеанс радиолокации продлится $\tau = \frac{2l}{c}$ {сеанс радиолокации - отправление сигнала к объекту и приход отражённого сигнала обратно

$2l$ - т.к. туда и обратно

$$\tau = \frac{2l}{c} = \frac{1,8 \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}}{3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}} = \frac{2,7}{3} \cdot 10^3 \text{ сек} = 0,9 \cdot 10^3 \text{ сек} =$$
$$= 900 \text{ сек} = 15 \text{ мин}$$

$$\boxed{\tau = 15 \text{ мин}}$$

Фаза астероида при этом, очевидно, равна 1 → он весь освещён.

$$\Phi = \frac{1 + \cos(0)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Ответ: 1.) $\tau = 15$ мин 2.) $\Phi = 1$ - освещён весь астероид