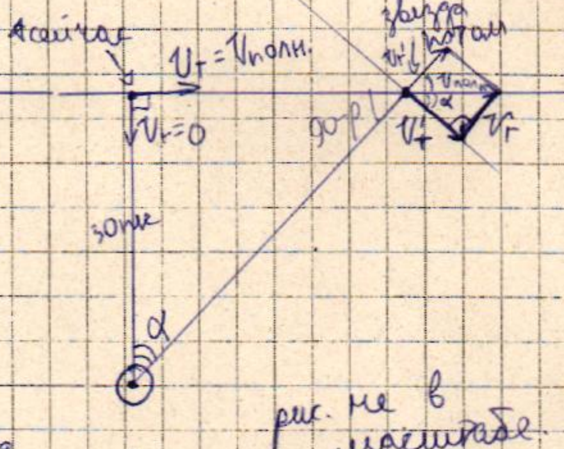
Бланк ответов Санкт-Петербургской олимпиады по астрономии

Шифр: 254

№1.



Так как сейчас лучевая скорость равна 0, значит звезда находится на минимальном расстоянии от Солнца. И её собственное движение определяется тангенциальной скоростью, которая равна полной.

Найдем её: где ω - собственное движение, $V_{полн}$ полная скорость, r-расстояние до звезды

$$\omega\left[''/год\right] = \frac{V_{полн.}\left[\frac{ае}{год}\right]}{r\,[ае]} \cdot 206265$$

$$V_{полн} = \frac{0{,}5''/год \cdot 30 \cdot 206265\,ае}{206265} = 15\,\frac{ае}{год}$$

За 100 лет она пройдет: $S = 15\frac{ае}{год} \cdot 100\,г = 1500\,ае$

Звезда будет удаляться, то есть лучевая скорость (V'_r) будет со знаком "+".

Найдем значение скорости, которую спектрометр все еще сможет различить: По закону Доплера:

$V = c \cdot z$, где $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{0{,}1\,Å}{500\,Å}$ (500Å - оптический диапазон)

$V = \frac{300000\frac{км}{с} \cdot 0{,}1}{500} = \frac{300}{5}\,\frac{км}{с} = 60\,\frac{км}{с}$ если V будет меньше, мы ее не обнаружим

Далее найдем $\angle\alpha$:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{1500\,ае}{206265 \cdot 30\,ае} \approx \frac{1500}{206265 \cdot 30}\,[рад] = \frac{50 \cdot 206265''}{206265} = 50''$$

для малых углов, как в нашем случае ($1500 \ll 30 \cdot 206265$)

Зная угол α, мы можем выразить V_r' ~~уравнение~~:

$$\sin\alpha = \frac{V_r'}{V_{полн}}$$

~~tg α = sin α~~

$\sin\alpha \sim tg\alpha \sim \alpha[рад]$

$$V_r' = V_{полн} \cdot \frac{50}{206265} = 15\,\frac{ае}{год} \cdot \frac{50}{206265} = \frac{750}{206265}\,\frac{ае}{год}$$

$$\begin{array}{r} 2\,5 \\ 1\,5 \\ \times\ 3\,5\,0 \\ \hline 7\,5\,0 \end{array}$$

Вообще, так как ∠α очень мал, тангенциальная скорость, конечно изменится, но на довольно малую величину, поэтому маленькая V_r' вполне оправдана. Переведем ее в $\frac{км}{с}$:

$$V_r' = \frac{750 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8\,км}{206265 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365\,с} = \frac{1125 \cdot 10^2}{206265 \cdot 3{,}6 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}65} = \frac{112500\,км}{206265 \cdot 31{,}5\,с} < 1$$

$$\begin{array}{r} \times\ 750 \\ 1{,}5 \\ \hline 3750 \\ 75 \\ \hline 1125{,}0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 2{,}4 \\ 3{,}6 \\ \hline 144 \\ 72 \\ \hline 8{,}64 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 8{,}64 \\ 3{,}65 \\ \hline 4320 \\ 5184 \\ 2592 \\ \hline 31{,}5360 \end{array}$$

V_r получается меньше единицы, то есть заведомо меньше $60\,\frac{км}{с}$, то есть ~~112500 / 206265 · 10~~ лучевую скорость звезды мы не обнаружим.

Ответ: нет, нельзя.

№2

① Зная абсолютную зв. величину найдем светимость звезды:

По закону Погсона: $\frac{L_*}{L_\odot} = 2{,}512^{M_\odot - M_*} = 2{,}512^{4{,}7+0{,}6} = 2{,}512^{5{,}3}$

За неимением калькулятора, ~~предположим, что~~ но зная, что

$2{,}512^5 = 100$, можно предположить $2{,}512^{5{,}3} = 10^{0{,}4\cdot 5{,}3} = 10^{2{,}12}$, это чуть больше 100, так что ~~н~~ возьмем $2{,}512^{5{,}3} \sim 100$

То есть данная звезда ярче Солнца в 100 раз.

② По закону Стефана-Больцмана:

$$\frac{L_*}{L_\odot} = 100 = \frac{4\pi R_*^2 \sigma \cdot T_*^4}{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4} = \frac{R_*^2 \cdot T_*^4}{R_\odot^2 \cdot T_\odot^4}$$

R_* в $R_\odot$: $R_* = \sqrt[2]{\frac{T_\odot^4}{T_*^4} \cdot 100} = 10 \cdot \frac{5800^2 K^2}{3400^2 K^2} = \frac{10 \cdot 3364 \cdot 10^4}{1156 \cdot 10^4} = 29{,}1 \cdot R_\odot \sim$

$\sim 30 R_\odot$

$$\begin{array}{r} \times 5800 \\ 5800 \\ \hline 464 \\ +290 \\ \hline 33640000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 3400 \\ 3400 \\ \hline 136 \\ +102 \\ \hline 11560000 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 33640 & 1156 \\ -2312 & 29{,}1 \\ \hline 10520 & \\ -10404 & \\ \hline 1160 & \\ -1156 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

③ $g = \frac{GM}{R^2} = 9{,}7\ \frac{м}{c^2}$, найдем из этой формулы массу звезды в $M_\odot$

Найдем $g_\odot$:

$$g_\odot = \frac{GM_\odot}{R_\odot^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{7^2 \cdot (10^8)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 2 \cdot 10^3}{49} = \frac{13340}{49}\ \frac{м}{c^2} = 272\ \frac{м}{c^2}$$

$$\begin{array}{r} \times 6{,}67 \\ 2 \\ \hline 13{,}34 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13340 & 49 \\ -98 & 272{,}2 \\ \hline 354 & \\ -343 & \\ \hline 110 & \\ -98 & \\ \hline 120 & \\ -98 & \\ \hline 22 & \end{array}$$

Выразим массу $*$ в $M_\odot$:

$$\frac{g_*}{g_\odot} = \frac{GM_* \cdot R_\odot^2}{R_*^2 \cdot GM_\odot} \cancel{\left(\frac{1}{30}\right)^2 \frac{M_*}{M_\odot}}$$

$$M_* = \frac{g_* \cdot R_*^2}{g_\odot \cdot R_\odot^2} \cdot M_\odot = \frac{9{,}7}{272} \cdot 900\, M_\odot = 2{,}3\, M_\odot$$

$$\begin{array}{r} \times 900 \\ 0{,}7 \\ \hline 630 \end{array} \qquad \cancel{\begin{array}{r|l} 630 & 272 \\ 544 & 2 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r|l} 630 & 272 \\ -544 & 2,3 \\ \hline 860 & \\ -816 & \\ \hline 44 & \end{array}$$

Итак, нам ~~кажд~~ известны следующие соотношения: $M_* = 2,3 M_\odot$; $R_* = 30 R_\odot$

Заметим, что максимально возможный эксцентриситет будет, если в ~~периг~~ перицентре своей орбиты экзопланета подойдёт максимально близко к звезде. Пренебрежем радиусом и массой самой планеты, тогда:

$r_{пер} = R_* = a(1-e)$ ~~$e = \frac{R_*}{}$~~ $e = 1 - \frac{R_*}{a}$

Большую полуось найдём из 3 закона Кеплера:

$\frac{T_*^2 \cdot M_*}{T_\odot^2 \cdot M_\odot} = \frac{a_*^3}{a_\odot^3}$, где $T_*, T_\odot$ - периоды планет звезды и Солнца (т.е. Земли)

$a_*, a_\odot$ - аналогичные им большие полуоси.

$T_\odot = 1г$, $a_\odot = 1ае$, тогда:

$T_*^2 \cdot 2,3 = a_*^3$ $a_* = \sqrt[3]{\left(\frac{73}{365}\right)^2 \cdot 2,3} = \sqrt[3]{0,11^2 \cdot 2,3} = \sqrt[3]{0,027} =$

$= 0,3 ае.$

$$\begin{array}{r|l} 730 & 365 \\ -365 & 0,11 \\ \hline 365 & \\ -365 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 0,11 \\ 0,11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 0,0121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 0,0121 \\ 2,3 \\ \hline +\ 363 \\ 242 \\ \hline 0,02783 \end{array}$$

Находим максимальный эксцентриситет:

$e = 1 - \frac{R_*}{a} = 1 - \frac{30 \cdot 700000 км}{0,3 \cdot 1,5 \cdot 10^8 км} = \frac{7 \cdot 10^7}{1,5 \cdot 10^8} = \frac{7}{15} \sim 0,5$

Ответ: $e_{max} = 0,5$

№4.

В январе Земля проходит перигелий, а в июле – афелий. ~~Так как частично в этих месяцах проходят два последовательных сближения астероида с Землей, то можно сказать, что афелий астероида лежит на линии Солнце-афелий Земли и следовательно перигелий~~

Заметим, ~~что~~ так как макс. сближения повторяются с интервалом в 94,5 года ~~(янв 2003 июль 2097-ян~~

(янв. 2003 – июль 2097). Это и есть синодический период астероида относительно Земли.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_\oplus} \qquad T_\oplus = 1 г, \quad S = 94{,}5 лет.$$

Выразим T_A:

$$\frac{1}{T_A} = \frac{94{,}5+1}{94{,}5} \Rightarrow T_A = \frac{94{,}5}{95{,}5} = 0{,}9895 лет.$$

~~94,8 | 95~~

```
 9450 | 955
-8595 |0,9895
  8550
 -7640
   9100
  -8595
    5050
   -4775
     275
```

По упрощенному (для солнечной системы) 3 закону ~~...~~ Кеплера:

$T^2 = a^3 \qquad T[г], a[ае]$

$a = \sqrt[3]{0{,}9895 лет}$

$$\begin{array}{r} \times\, 0,9895 \\ 0,9895 \\ \hline 49775 \\ +\,90055 \\ 79160 \\ 90055 \\ \hline 0,98921325 \end{array}$$

$a=\sqrt[3]{0,989}$ ае! Такое без калькулятора, да еще и с точностью до 3 знака после запятой крайне сложно, однако давайте прикинем. Возведем 0,99~~7~~6 в куб:

$$\begin{array}{r} \times\, 0,996 \\ 0,996 \\ \hline 5976 \\ +\,8964 \\ 8964 \\ \hline 0,992016 \end{array}$$

получается число 0,988, что очень

$$\begin{array}{r} \times\, 0,996 \\ 0,992 \\ \hline 1992 \\ 8964 \\ 8964 \\ \hline 0,988032 \end{array}$$

близко к 0,989. Значит $a=0,996$ ае

Ответ: $a=0,996$ ае.

См. продолжение на стр. 10!!!

№3.

Про Антарес я знаю только то, что это яркий, красный сверхгигант, находящийся в созвездии Скорпиона. Для нахождения углового размера диска, нам нужно знать истинные размеры звезды и расстояние до нее. Красные звезды обычно очень массивные и яркие, но при этом холодные (относительно Солнца). Можно смело предположить, что Антарес, как и большинство звезд такого типа, имеет абсолютную звездную величину $-5^m - -7^m$, ~~среднее значение -6^m, его и возьмем~~ для удобства вычислений возьмем $M=-5^m$, в то время как видимая звездная величина составляет $\sim 1^m$ (Антарес на небе тусклее Веги с 0^m). Зная эти данные, найдем расстояние до звезды:

$M = m + 5 - 5\lg r$

$\lg r = \frac{m+5-M}{5}$ $\quad r = 10^{\frac{1+5+5}{5}} = 10^{2,2}$ пк ~ 150 пк

~~Далее~~ Также нам нужен радиус. Его можно оценить, зная, что характерный ~~размер~~ радиус таких звезд варьируется в промежутке 100÷1000 $R_\odot$, предположим, что $R_A = 500 R_\odot$ (среднее значение).

Тогда угловой размер диска Антареса равен:

$$d_A = \frac{2 \cdot R_A}{r}[рад] = \frac{2 \cdot 500 \cdot R_\odot}{150_{ае} \cdot 206265} \cdot 206265'' = \frac{1000 R_\odot}{150 ае}'' =$$

$$= \frac{1000 \cdot 700000 км}{150 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 км}'' = \frac{7 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 150 \cdot 10^8}'' = \frac{7}{1{,}5 \cdot 150}'' = \frac{7}{15^2}'' = \frac{7}{225}'' \sim$$

$\sim 0{,}03''$

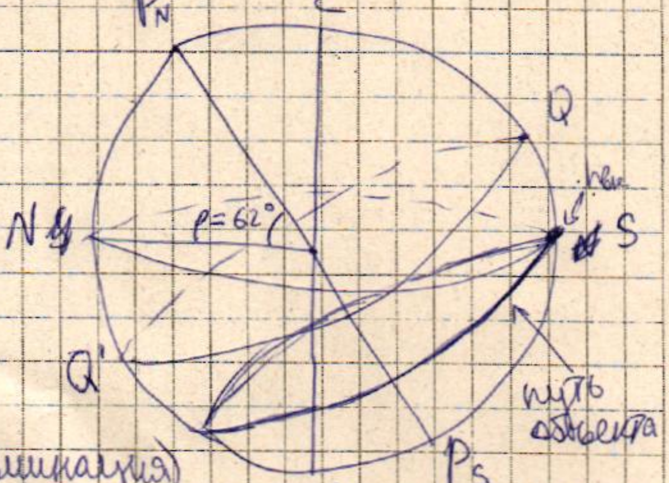
$$\begin{array}{r|l} 700 & 225 \\ -675 & 0{,}031 \\ 250 & \\ -225 & \\ 250\ldots & \end{array}$$

Ответ: $d_A = 0{,}03''$.

№5.

Нарисуем небесную сферу для Аркадия:

Из условия мы знаем, что он видел объект на юге на горизонте, что означает, что он кульминировал (верхняя кульминация) на горизонте, т.е. $h_{вк} = 0°$

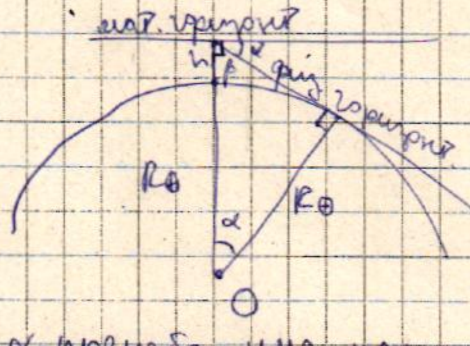


Найдем склонение наблюдаемого объекта:

$h_{вк} = 90° - \varphi + \delta = 0°$ $\delta = \varphi - 90° = 62° - 90° = -28°$

① Ответим на первый вопрос задачи. Для начала посчитаем максимальную высоту объекта если бы Василий находился на поверхности Земли: $h_{вк} = 90 - \varphi + \delta = 90 - 44° - 28° = 18°$.

Далее найдем поднятие горизонта для Василия: обозначим его α.



Тогда $\cos\alpha = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}$

$\beta = 90 - \alpha \Rightarrow \sin\beta = \cos\alpha = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}$

α - пренебрежимо мал.

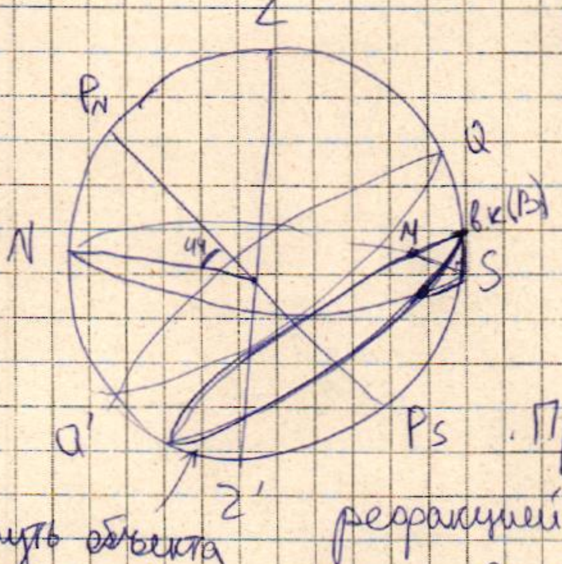
$\frac{6371}{6371 + 0{,}885} = \frac{6371}{6371{,}885}$ (это очень близко к 1)

```
 63710000 | 6371885
-57346965 | 0,9999
  63630350
  57346965
   62833850
   57346965 ...
```

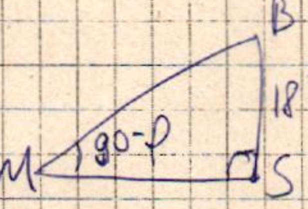
Вычислять вручную это крайне сложно, поэтому окончательный ответ на вопрос можно оставить в виде $18 + \arccos\left(\frac{6371}{6371{,}885}\right)$, что с довольно хорошей точностью равно $18°$

② $\Delta\lambda = 12°$ или $\frac{12 \cdot 24}{360} = \frac{12}{15} \cdot 60 = 48$ мин.

Василий находится восточнее, что означает, что у него объект будет кульминировать на 48 мин раньше, чем у Аркадия. Нарисуем небесную сферу для Василия.



Рассмотрим △MBS (М – точка восхода объекта, В – его верхняя кульм.)



. Пренебрегая высотой гор и рефракцией, можем сказать, что Василий впервые увидит объект в (·) М. А случится это за T времени до кульминации. Найдем T. За это время объект проходит дугу MB. ~~MB~~ Используя плоскую тригонометрию (пренебрегаем сферичностью △, т.к. без калькулятора её учесть очень и очень сложно) найдем дугу MB:

$\frac{BS}{MB} = \sin(90-\varphi) = \sin 46 \sim \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad MB = \frac{18^\circ \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{36\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}^\circ$

Различием длины ~~дуги~~ круга движения объекта и большого круга сферы также можно пренебречь (точнее просто не использовать $\cos\delta$, ведь мы не переходим на большие круги, считаем лишь на малом)

Объект проходит 360° за 24ч (допустим это не близкий к Земле объект), значит $T = \frac{24}{360} \cdot 18\sqrt{2} = \frac{18 \cdot 1{,}4}{15} =$ $\sim 1{,}7$ч $= 102$ мин

$$18 : 5 = 1{,}2$$

$$1{,}2 \cdot 1{,}4 = 1{,}68 \approx 1{,}7$$

$$1{,}7 \cdot 60 = 102$$

Получается Василий увидит объект на 48 мин + 102 мин = 150 мин = 2,5 ч раньше, чем Аркадий.

Ответ: ① $h_{вк} = \cancel{48}\ 18^\circ$, ② на 2,5 ч раньше

№4 (продолжение)

~~Такое~~ Вообще возможно два случая: астероид вращается против часовой стрелки (сонаправленно с Землей и многими телами солнечной системы) и по часовой стрелке (против направления движения Земли). Ранее мы рассмотрели первый случай и получили адекватный ответ. Рассмотрим второй случай: $S = 94{,}5\,г$ $T_\oplus = 1\,г$, но формула будет уже со знаком „+": $\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} + \frac{1}{T_\oplus}$

$\frac{1}{T_A} = \frac{94{,}5-1}{94{,}5}$ $T_A = \frac{94{,}5}{93{,}5}\,г$. Это больше $1\,г$, а значит по 3ему закону Кеплера ($T^2 = a^3$) большая полуось (a) получится также больше 1ае, что не соответствует условию задачи (там сказано, что a чуть меньше 1ае) значит этот случай отпадает и ответ все также остается равен $a = 0{,}996$ ае

Ответ: $a = 0{,}996$ае.