Задача 1.

Решение:

Угол аберрации равен:

$$\sin\theta = \frac{v}{c} \quad \text{или} \quad \theta \approx \frac{v}{c} \quad (\theta \ll 1)$$

Тогда, если Солнечная система имеет скорость 240 км/с, то

$$\theta'' \approx \frac{240\ \text{км/с}}{3\cdot 10^5\ \text{км/с}} \cdot 206265'' \approx 165''$$

Радиоинтерферометр может различить объект с угловым размером:

$$\theta_{radio} = \frac{\lambda}{D}$$

Задача 2.

Дано: $m_V = 4^m$
$r = 100пк$
$T = 15 \cdot 10^3 K$
$M = 5 M_\odot$
$m_{б.с.} = -1,5^m$
$v_э = 2,0 \cdot 10^2$ км/с

Найти: ΔR - ?

Решение:

По условию: вид. зв. величина равна:

$$m_V = 4^m$$

Тогда с учетом поправки болометрич зв. вел. равна:

$$m_б = m_V + m_{б.с.} = 4^m - 1,5^m = 2,5^m$$

Тогда, зная расстояние r, найдём абс. зв. величину M для звезды:

$$M - m_б = 5 - 5\lg r$$

$$M = m_б + 5 - 5\lg r = 2,5^m + 5^m - 5^m \cdot \underbrace{\lg 100(пк)}_{2} =$$

$$= -2,5^m$$

Найдём светимость звезды: (формула Погсона)

$$L = L_\odot \cdot 10^{-0,4(M - M_\odot)} = L_\odot \cdot 10^{-0,4 \cdot (-2,5 - 4,7)} \approx 10^{2,9} L_\odot \approx 900 L_\odot$$

Тогда, исп. формулу для закона Стефана-~~[illegible]~~-Больцмана:

$$\left.\begin{aligned} L &= 4\pi R^2 \sigma T^4 \\ L_\odot &= 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{900 L_\odot}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4$$

$$\frac{R}{R_\odot} = \sqrt{\left(\frac{T_\odot}{T}\right)^4 \cdot 900} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = R_\odot \sqrt{\left(\frac{5,8 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3}\right)^4 \cdot 900} = 30 \left(\frac{5,8}{15}\right)^2 \cdot R_\odot = \frac{2 \cdot 5,8^2}{15} \cdot R_\odot \approx \frac{2 \cdot 33,6}{15} R_\odot \approx$$

$$\approx 4,5 R_\odot$$

Для Солнца:

$$\frac{2\pi R_\odot}{v_{э\odot}} = T_\odot = 29^d$$

и:

$$\frac{2\pi R}{v_э'} \approx T_\odot \approx 29^d$$

$$v_э' = \frac{2\pi \, 4,5 R_\odot}{29^d} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4,5 \cdot 7 \cdot 10^5}{29 \cdot 24 \cdot 3600} \text{ км/с}$$

Задача 4

Шифр: 215

Решение:

$\left.\begin{array}{l} a = 0{,}25 \text{ а.е.} \\ e = 0{,}6 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = a(1+e) = 0{,}25(1+0{,}6)\text{ а.е.} = 0{,}3\text{ а.е.}$ – афелий

перигелий: $q = a(1-e) = 0{,}25(1-0{,}6)\text{ а.е.} = 0{,}1\text{ а.е.}$

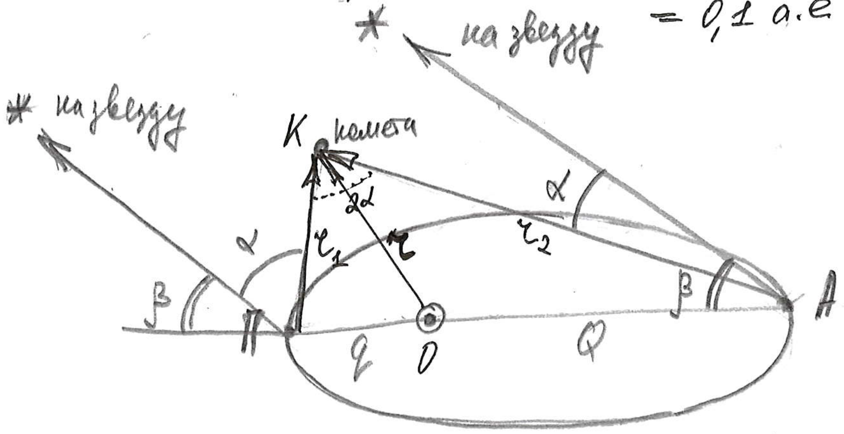


рис 1.

Сделаем рисунок (рис 1). направим пар-ые оси на звезду, а также радиус вектора от КА до кометы и от О до кометы.

Теорема косинусов для ΔKAO и $\Delta K\Pi O$:

$$r^2 = q^2 + r_1^2 - \cos(180° - \alpha - \beta)\cdot 2 r_1 q \quad (1)$$

$$r^2 = Q^2 + r_2^2 - \cos(-\alpha + \beta)\cdot 2 r_2 Q \quad (2)$$

$\Delta K\Pi A$:

$$(q+Q)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\underbrace{\left(180° - (180° - \alpha - \beta) - (\beta - \alpha)\right)}_{\cancel{180°} - \cancel{180°} + \alpha + \cancel{\beta} - \cancel{\beta} + \alpha = 2\alpha}$$

$$\underbrace{(q+Q)}_{2a}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 \cdot r_2 \cos 2\alpha$$, где $\alpha = 33°$ по усл.

$$4a^2 = r_1^2 + r_2^2 - r_1 \cdot r_2 \cos 2\alpha$$

(1) + (2): $2r^2 = q^2 + Q^2 + r_1^2 + r_2^2 + \cos(\alpha + \beta)\cdot 2 r_1 q - \cos(\beta - \alpha)\cdot 2 r_2 Q =$

$= q^2 + Q^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 q \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) -$

$- 2 r_2 Q(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta)$

Δ КПА:

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}{r_2} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{r_1} = \frac{\sin 2\alpha}{q+Q}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{r_2} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{r_1} = \frac{\sin 2\alpha}{q+Q}$$

$$\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{r_2} = \frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\beta}{r_1}$$

Задача 5. Шифр: 215

Решение:

Т.к. звезда спектрального класса G2V, то она сильно похожа на Солнце: т.е. $R = R_\odot$, $L = L_\odot$ и $M = M_\odot$.

Можно вспомнить задачи прошлых лет ;) и заметить, что эта звезда имеет пятно. Тогда при транзите планета попадает на яркую поверхность звезды, а потом на пятно (поэтому блеск и увеличился), и потом планета опять „вышла" из пятна и закрыла яркую часть звезды. Это и есть причина увеличения блеска во время транзита.

Тогда найдем размер этого пятна.

Т.к. локальный максимум меньше, чем сам максимум, то размер пятна меньше размера планеты:

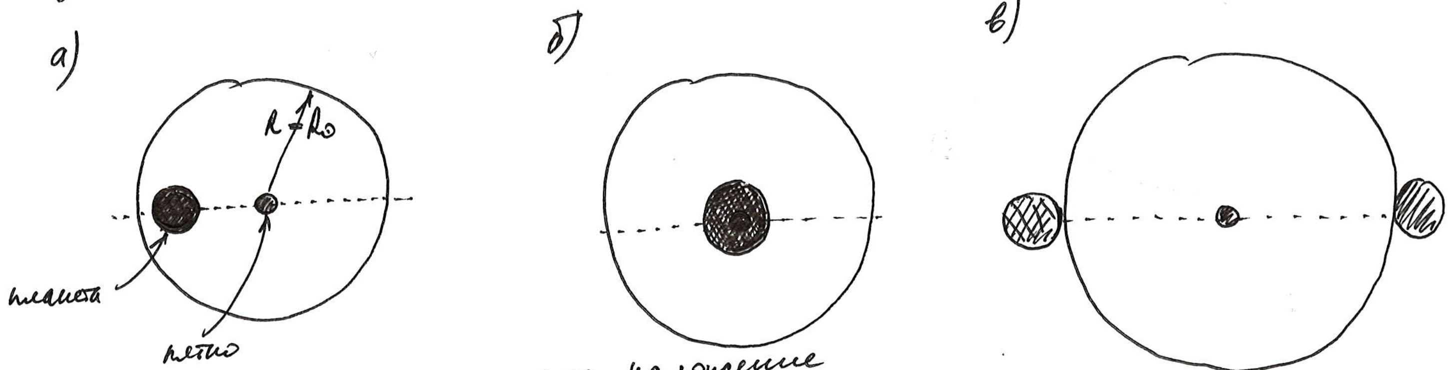


рис. планета и пятно отдельно

рис. наложение планеты на пятно

рис. начало и конец транзита

Пусть мощность энергии, приходящая от звезды без пятна и планеты равно E.

Размер (их радиус) планеты: ρ_p

звезды: ρ_s

пятна: ρ_m

Тогда запишем отношения ~~[illegible]~~ максимумов и чему равны мощности E от разных расположений планеты на диске звезды:

Шифр: 215

$$E_0 = E\,\frac{\pi\rho_s^2 - \pi\rho_m^2}{\rho_s^2} = E\,\frac{\rho_s^2 - \rho_m^2}{\rho_s^2}$$ — это 100% от максимума блеска. (звезда – пятно)

$$E_1 = E\,\frac{\rho_s^2 - \rho_m^2 - \rho_p^2}{\rho_s^2}$$ — это 97% от максимума блеска: (звезда – пятно – планета)

$$E_2 = E\,\frac{\rho_s^2 - \rho_p^2}{\rho_s^2}$$ — это 98% от максимума блеска: (звезда – планета)

~~Преобразуем к виду~~

~~$E_0 = E\left(1 - \frac{\rho_m^2}{\rho_s^2}\right)$~~

Здесь считали, что пятно не излучает никакой ~~[illegible]~~ энергии. Попробуем учесть её:

$$E_0 = E\,\frac{\rho_s^2 - \rho_m^2}{\rho_s^2} + E_m$$

$$E_1 = E\cdot\frac{\rho_s^2 - \rho_m^2 - \rho_p^2}{\rho_s^2} + E_m$$

$$E_2 = E\cdot\frac{\rho_s^2 - \rho_p^2}{\rho_s^2}$$

или так: (используя з-н Ст.-Больцмана) →

$$\begin{cases} E_0 = \pi(\rho_s^2 - \rho_m^2)\sigma T_s^4 + \pi\rho_m^2\sigma T_m^4 & (1) \\ E_1 = \pi(\rho_s^2 - \rho_m^2 - \rho_p^2)\sigma T_s^4 + \pi\rho_m^2\sigma T_m^4 & (2) \\ E_2 = \pi(\rho_s^2 - \rho_p^2)\sigma T_s^4 & (3) \end{cases}$$

, где $T_s = T_\odot$ – темп. звезды и $T_m < T_\odot$ – темп. пятна.

~~$(1)-(2): E_0 - E_1 = \rho_p^2\sigma T_s^4$~~

$$E_0 = \pi\rho_s^2\sigma T_s^4 - \pi\rho_m^2\sigma T_s^4 + \pi\rho_m^2\sigma T_m^4$$

$$E_1 = \pi\rho_s^2\sigma T_s^4 - \pi\rho_m^2\sigma T_s^4 - \pi\rho_p^2\sigma T_s^4 + \pi\rho_m^2\sigma T_m^4$$

$$E_2 = \pi\rho_s^2\sigma T_s^4 - \pi\rho_p^2\sigma T_s^4$$

$$\left.\begin{aligned} E_0 - E_1 &= \pi \rho_p^2 \sigma T_s^4 \\ E_2 &= \pi \rho_s^2 \sigma T_s^4 - \pi \rho_p^2 \sigma T_s^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_0 - E_1} = \frac{\pi \rho_s^2 \sigma T_s^4 - \pi \rho_p^2 \sigma T_s^4}{\pi \rho_p^2 \sigma T_s^4} = \left(\frac{\rho_s}{\rho_p}\right)^2 - 1 \quad (*)$$

$$E_2 - E_1 = \pi \rho_s^2 \sigma T_s^4 - \pi \rho_p^2 \sigma T_s^4 - (\pi \rho_s^2 \sigma T_s^4 - \pi \rho_m^2 \sigma T_s^4 - \pi \rho_p^2 \sigma T_s^4 + \pi \rho_m^2 \sigma T_m^4)$$

$$\left.\begin{aligned} E_2 - E_1 &= \pi \rho_m^2 \sigma (T_s^4 - T_m^4) \\ E_0 &= \pi \rho_s^2 \sigma T_s^4 - \pi \rho_m^2 \sigma (T_s^4 - T_m^4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_0}{E_2 - E_1} = \frac{\rho_s^2}{\rho_m^2} \cdot \frac{T_s^4}{(T_s^4 - T_m^4)}$$

$$\frac{E_2 - E_1}{E_0} = \frac{\rho_m^2}{\rho_s^2} \cdot \left(1 - \frac{T_m^4}{T_s^4}\right) = \frac{E_2}{E_0} - \frac{E_1}{E_0} = 0{,}98 - 0{,}97 = 0{,}01 \quad (**)$$

$(*)$: $$\frac{E_2}{E_0 - E_1} = \frac{1}{\frac{E_0}{E_2} - \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{E_0}{E_0}} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}98} - \frac{1}{0{,}98} \cdot \frac{0{,}97}{1}} =$$

$$= \frac{0{,}98}{1 - 0{,}97} = \frac{0{,}98}{0{,}03} = \frac{98}{3}$$

Тогда: $$\left(\frac{\rho_s}{\rho_p}\right)^2 - 1 = \frac{98}{3}$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_p} = \sqrt{1 + \frac{98}{3}} = \sqrt{\frac{3 + 98}{3}} = \sqrt{\frac{101}{3}} \approx 5{,}8$$

$$\boxed{\rho_s = 5{,}8 \rho_p}$$

$(1) - (3)$: $$E_0 - E_2 = \pi \rho_p^2 \sigma T_s^4 - \pi \rho_m^2 \sigma T_s^4 + \pi \rho_m^2 \sigma T_m^4$$

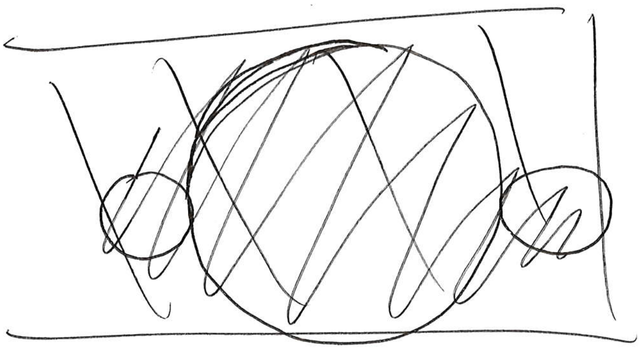
$$\frac{E_0 - E_2}{E_0} = \frac{\rho_p^2 T_s^4 - \rho_m^2 T_s^4 + \rho_m^2 T_m^4}{\rho_s^2 T_s^4 - \rho_m^2 T_s^4 + \rho_m^2 T_m^4}$$

Т.к. система находится далеко, то

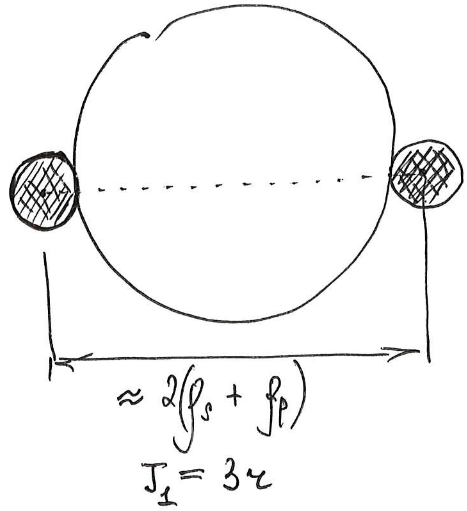
$\rho_s = 5{,}8\,\rho_p$ как и $R_s = 5{,}8\,R_p$

и $R_p = \dfrac{R_s}{5{,}8} = \dfrac{R_\odot}{5{,}8}$

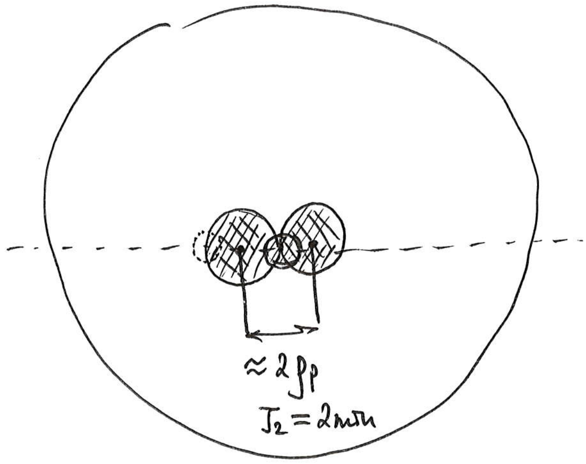
Найдём $\dfrac{\rho_m^2}{\rho_s^2} = \dfrac{R_m^2}{R_s^2}$!



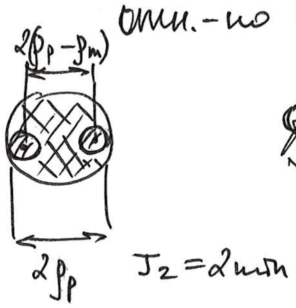
а)

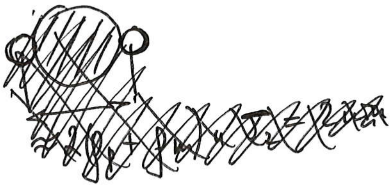


б)



отн.-но планеты:





из а) б) найдём ρ_m :

а) $J_1 \,:\, 2(\rho_s + \rho_p)$

б) $J_2 \,:\, 2(\rho_p - \rho_m)$

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{2(\rho_s + \rho_p)}{2(\rho_p - \rho_m)} = \frac{2(\rho_s + \rho_s/5{,}8)}{2(\rho_s/5{,}8 - \rho_m)} = \frac{3\cdot \overset{30}{\cancel{60}}}{\cancel{2}} = 90$$

$$\rho_s + \rho_s/5{,}8 = 90\,\rho_s/5{,}8 - 90\rho_m$$

$$\Rightarrow \rho_m = -\frac{\rho_s\left(1 + \frac{1}{5{,}8} - \frac{90}{5{,}8}\right)}{90} = -\rho_s\,\frac{5{,}8 + 1 - 90}{90\cdot 5{,}8} = \frac{83{,}2}{90\cdot 5{,}8}\,\rho_s \approx$$

$$\approx \frac{\rho_s}{5{,}8\cdot 1{,}06} \approx \frac{\rho_s}{6{,}1}$$

Тогда $R_m = \dfrac{R_s}{6{,}1} = \dfrac{R_\odot}{6{,}1}$

Температура пятна:

$$1-\frac{T_m^4}{T_s^4}=\frac{\rho_s^2}{\rho_m^2}\cdot 0{,}01=\frac{\rho_s^2}{\rho_s^2}\cdot 6{,}1^2\cdot 0{,}01$$

$$\frac{T_m^4}{T_s^4}=1-6{,}1^2\cdot 0{,}01=1-0{,}3721\approx 0{,}67$$

$$T_m=T_s\sqrt[4]{0{,}67}\approx T_\odot\cdot 0{,}91\approx 5300\text{ K}$$

Ответ: радиус пятна: $R_m\approx\frac{R_\odot}{6{,}1}$

радиус планеты: $R_p\approx\frac{R_\odot}{5{,}8}$

Температура пятна: $T_m\approx 5300$ K