СТЕ - 18

XXIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

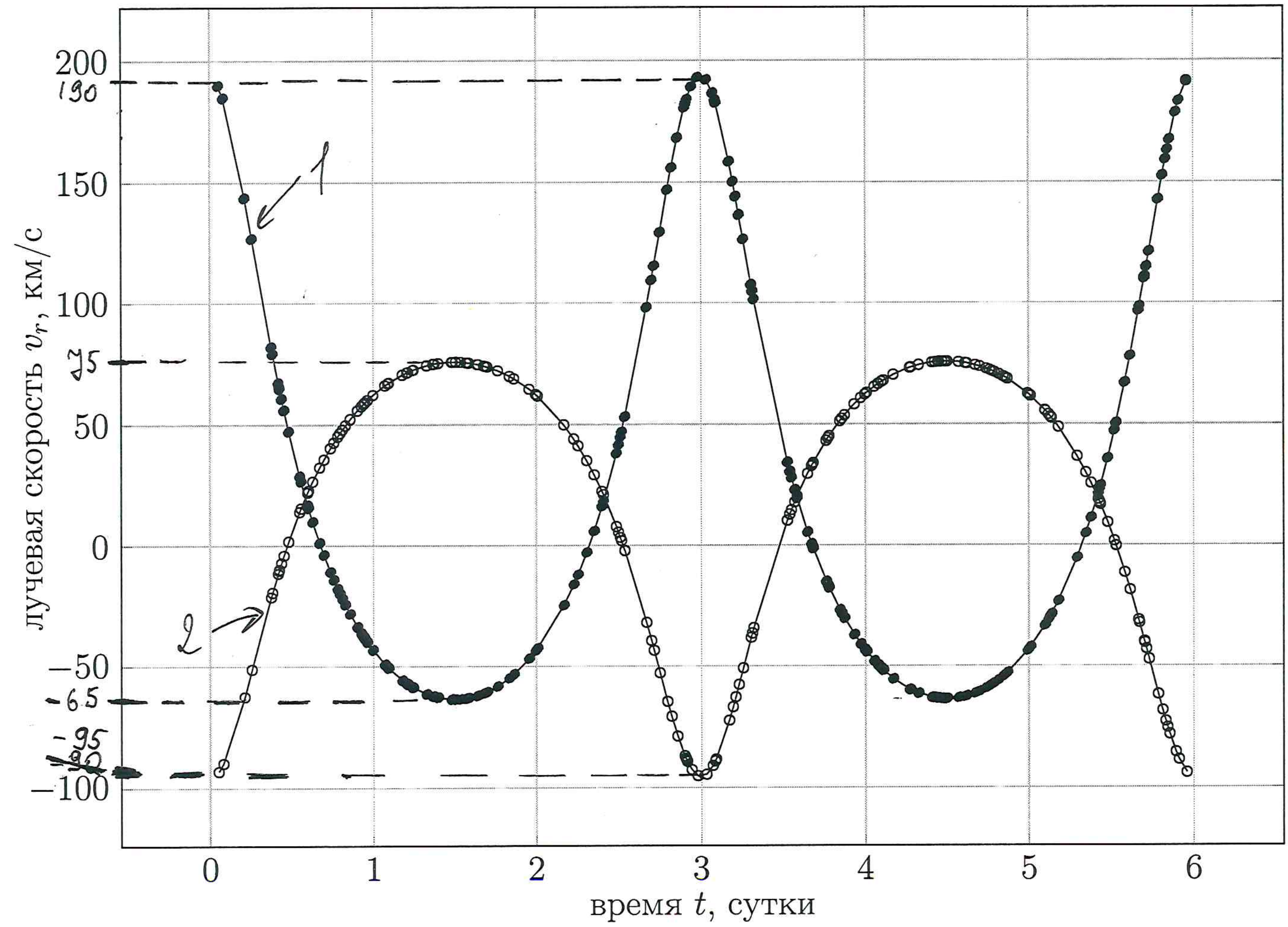
практический тур

2022

13 марта

11 класс

Вам дана кривая лучевых скоростей двойной системы, состоящей из двух звезд Главной последовательности. Луч зрения лежит в плоскости орбиты, линия апсид (соединяющая периастры и апоастры орбит) перпендикулярна лучу зрения. Найдите параметры системы: массы звезд, период и большую полуось системы, эксцентриситет орбиты. Определите видимые звездные величины системы в максимуме и минимумах блеска. Годичный параллакс системы равен $\pi = 0''.05$, звезды считайте сферически симметричными, эффектами прогрева и потемнения диска к краю можно пренебречь.



1) Линия апсид перпендикулярна лучу зрения, а луч зрения лежит в плоскости орбиты. Значит, точки экстремума каждой звезды будут ~~являться~~ соответствовать точкам перицентра и апоцентра их орбит, а модули лучевых скоростей — скоростям звёзд в данных точках.

Обозначив звезды как 1 и 2, определив их скорости (см график) мы имеем: $v_{П_1}=190$ (км/с); $v_{A_1}=65$ (км/с); $v_{П_2}=95$ (км/с); $v_{A_2}=75$ (км/с).

Пусть орбитальная скорость первой звезды v_{o_1}, второй — v_{o_2}.

Как известно, $v_П = v_0\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$; $v_A = v_0\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$, где e — эксцентриситет орбиты.

Тогда $\frac{v_{П_1}}{v_{A_1}} = \frac{1+e_1}{1-e_1} \approx 3 \Rightarrow e_1 = 0,5$; аналогично $\frac{v_{П_2}}{v_{A_2}}=\frac{1+e_2}{1-e_2}\approx 1,25 \Rightarrow e_2=\frac{1}{9}$

2) зная „e", определим орбитальные скорости обеих звёзд: ~~по их орбитам~~.

$v_{o_1} = v_{П_1}\cdot\sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}} = 190\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\simeq 110$ (км/с); $v_{o_2}=v_{A_2}\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}} = 65\cdot\sqrt{\frac{\frac{10}{9}}{\frac{8}{9}}} \simeq 65\cdot\sqrt{1,25}\approx 65\cdot 1,1 \approx 80$ (км/с)

3) считая орбитальную скорость средней скоростью движения звезд по эллипсам, найдем длины эллипсов, по которым двигаются звезды, зная период обращения звезд: $T_1=T_2=3$ (сут.); $l = v_0\cdot T$.

$l_1 = 110\cdot3\cdot86100$ (км); $l_2=80\cdot3\cdot86100$ (км).

С другой стороны, $l=\pi(a+b)$, где a и b — большая и малая полуось эллипса.

$b = a\sqrt{1-e^2} \Rightarrow l=\pi a(1+\sqrt{1-e^2})$

Тогда $l_1 = 110\cdot3\cdot86100 = \pi\cdot a_1(1+\sqrt{1-0,25})$; $l_2 = 80\cdot3\cdot86100=\pi a_2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{81}}\right)$;

$a_1 = \frac{110\cdot\cancel{3}\cdot86100}{\cancel{\pi}\cdot1,9}\approx 60\cdot86100 = 5,2\cdot10^6$ (км) $\quad a_2=\frac{80\cdot\cancel{3}\cdot86100}{\cancel{\pi}\cdot2}\approx 40\cdot86100\approx3,4\cdot10^6$ (км)

4) Зная большие полуоси орбит каждой звезды, найдём большую полуось системы:

$A = a_1+a_2 = 5,2\cdot10^6+3,4\cdot10^6 = 8,6\cdot10^6\simeq 9\cdot10^6$ (км)

~~Орбита~~ Период этой двойной системы равен $T = 3$ (сут.)

Тогда по III закону Кеплера: $\frac{T^2}{T_\odot^2}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_\odot}=\frac{a^3}{a_\odot}$, где $T_\odot$ — период обращения ~~звезды~~ Земли вокруг Солнца, $a_\odot$ — расстояние от Земли до Солнца. Подставляя значения, получаем:

$\frac{m_1+m_2}{m_\odot} = \left(\frac{9\cdot10^6}{150\cdot10^6}\right)^3\cdot\left(\frac{365}{3}\right)^2 \simeq \left(\frac{3}{50}\right)^3\cdot120^2 = \frac{27\cdot14400}{125000}\approx\frac{3888}{1250}\simeq 3,1 \Rightarrow m_1+m_2 = 3,1\, m_\odot$

5) Из II закона Ньютона имеем соотношение $\frac{a_1}{a_2}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{5,2}{3,4}\simeq1,5$

Тогда т.к. $m_1+m_2 = 3,1\, m_\odot$, то $m_1 = \frac{3,1\, m_\odot}{2,5}\simeq 1,2\, m_\odot$; $m_2 = 3,1\, m_\odot - 1,2\, m_\odot = 1,9\, m_\odot$.

6) Известна зависимость масса - светимость и ~~масса~~ светимость - радиус.

$\frac{L}{L_\odot} = \cancel{4}\left(\frac{m}{m_\odot}\right)^4$; $\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^5 = \frac{L}{L_\odot}$

$\frac{L_1}{L_\odot} = \left(\frac{m_1}{m_\odot}\right)^4 = \left(\frac{1{,}2m_\odot}{m_\odot}\right)^4 \simeq 2$; $\frac{L_2}{L_\odot} = \left(\frac{1{,}9m_\odot}{m_\odot}\right)^4 \approx 3{,}6^2 \simeq 13$.

Тогда $\frac{R_1}{R_\odot} = \sqrt[5]{2} \simeq 1{,}1$ и $\frac{R_2}{R_\odot} = \sqrt[5]{13} \simeq 1{,}7$.

7) По формуле Погсона $\frac{L}{L_\odot} = 10^{0{,}4(M_\odot - M)}$, где $M_\odot$ и M - абсолютная зв. вел. Солнца и звезды ($M_\odot = 4{,}8^m$).

Выразим отсюда $M = M_\odot - 2{,}5\lg\left(\frac{L}{L_\odot}\right)$.

Тогда $M_1 = 4{,}8 - 2{,}5\lg\left(\frac{L_1}{L_\odot}\right) = 4{,}8 - 2{,}5\cdot\lg 2 \simeq 4{,}8 - 2{,}5\cdot 0{,}3 \simeq 4^m$;

$M_2 = 4{,}8 - 2{,}5\lg\left(\frac{L_2}{L_\odot}\right) = 4{,}8 - 2{,}5\cdot\lg 13 \simeq 4{,}8 - 2{,}5\cdot 1{,}1 \cancel{\simeq 4{,}8 - 2{,}8 = 4^m}\ 4{,}8 - 2{,}8 = 2^m$.

8) $\pi = 0{,}05''$, а значит $r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}05} = 20$ (пк).

Тогда из формулы $M = m + 5 - 5\lg r$ выразим $m = M - 5 + 5\lg r$.

$\lg 20 \simeq 1{,}3$, тогда $m = M - 5 + 5\cdot 1{,}3 = M + 1{,}5$.

$m_1 = 4 + 1{,}5 = 5{,}5^m$; $m_2 = 2 + 1{,}5 = 3{,}5^m$.

9) Максимум блеска будет достигаться тогда, когда звезды не перекрывают друг друга, т.е. $L_{об} = L_1 + L_2$.

Тогда по формуле Погсона $M_{об} = M_\odot - 2{,}5\lg\left(\frac{L_1 + L_2}{L_\odot}\right) = 4{,}8 - 2{,}5\lg 15 \simeq 4{,}8 - 2{,}5\cdot 1{,}2 = 1{,}8^m$

А значит $m_{об} = 1{,}8 + 1{,}5 = 3{,}3^m$.

Минимум блеска будет тогда, когда менее яркая частично закроет более яркую.

Т.к. расстояние между звездами мало, то видимые площади звезд будут относиться как $\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$.

Подставляя значения из пункта 6, получаем: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1{,}21}{2{,}89} \simeq \frac{2}{5}$.

Тогда общая светимость системы будет равна $L_{об}' = L_1 + \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)L_2 = L_1 + \frac{3}{5}L_2$.

$M_{об}' = M_\odot - 2{,}5\lg\left(\frac{L_1 + \frac{3}{5}L_2}{L_\odot}\right) = 4{,}8 - 2{,}5\lg\left(2 + \frac{3}{5}\cdot 13\right) \approx 4{,}8 - 2{,}5\lg 10 = 2{,}3^m$.

$m_{об}' = M_{об}' + 1{,}5 = 2{,}3 + 1{,}5 = 3{,}8^m$.

10) Эксцентриситет орбиты мы определим, „заморозив" одну из звезд, к примеру, вторую. Тогда по правилу сложения скоростей скорость 1 звезды в перицентре и апоцентре $v_П = v_{1П} + |v_{2П}| \simeq 300$; $v_А = |v_{1А}| + v_{2А} = 140$.

$\frac{v_П}{v_А} = \frac{300}{140} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow e \simeq \frac{1}{3}$. Ответ: $A = 9\cdot 10^6$ км; $T = 3$ суток; $m_1 = 1{,}2m_\odot$; $m_2 = 1{,}9m_\odot$; $e = \frac{1}{3}$; $m_{max} = 3{,}3^m$; $m_{min} = 3{,}8^m$.