Задача 3

Как известно, галактики вращаются вокруг своей оси. Выберем такую галактику, что её плоскость лежит на луче зрения, т.е. будут звёзды, полная скорость которых состоит только из лучевой.

(Если это не так, то нужно будет брать лучевую компоненту скорости звёзд, что уменьшит скорость и в итоге приведёт к увеличению расстояния; а мы ищем минимальное)

~~В среднем~~ Возьмём за скорость звезды значение 250 км/с (средняя скорость ~~зв~~ вращения спиральных галактик) ~~в типичных~~ ~~это значение~~. Тогда фиолетовое смещение линий в спектре будет обуславливаться именно такими звёздами:

$$z_ф = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v_r}{c}$$

С другой стороны большинство галактик достаточно далеко ~~от~~ нас чтобы иметь Хаббловское красное смещение:

$$z_H = \frac{HR}{c}$$, где H — постоянная Хаббла; $H \approx 70 \frac{км}{с \cdot Мпк}$

И фиолетовое смещение линий спектра в галактиках ~~буд~~ будет компенсироваться Хаббловским и совсем исчезнет

при $z_H \geq z_ф$: $\frac{HR_{min}}{c} \geq \frac{v_r}{c}$

$$R_{min} = \frac{v_r}{H} = \frac{250 \text{ км/с}}{70 \frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}} \approx 3{,}6 \text{ Мпк}$$

Ответ: 3,6 Мпк.

Задача 1

~~На период колеба~~ Период колебаний математического маятника зависит от g; длины нити l и вращения планеты. Для начала рассмотрим маятник на полюсе:

$T_п = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$; на него не влияет вращение планеты, значит изменение периода от поднятия связано только с изменением g:

$T_п' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} = 1{,}02\, T_п = 1{,}02 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$

$g_0 = (1{,}02)^2 g_1$

$\frac{GM}{R_0^2} = (1{,}02)^2 \cdot \frac{GM}{(R_0+h)^2}$

$(R_0+h)^2 = R_0^2 (1{,}02)^2$

$h = 0{,}02 R_0 \longrightarrow R_0 = \frac{130}{0{,}02}\text{ км} = 6500$ км

На экваториальный маятник действует центробежная сила, уменьшая g_0 на $\omega^2 R_0$ (планета - шар $\Rightarrow$ g_0 и R_0 постоянны на всей поверхности)

и $T_{экв} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0 - \omega^2 R_0}} = 1{,}02 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_0}} \Rightarrow g_0 = (1+0{,}02)^2 \cdot (g_0 - \omega^2 R_0)$

$(1+0{,}02)^2 \simeq 1{,}04$

$\omega^2 R_0 = 0{,}04\, g_0 \rightarrow g_0 = \frac{4\pi^2 \cdot R_0}{T^2 \cdot 0{,}04} = \frac{40 \cdot 6500000}{(10\cdot60\cdot60)^2 \cdot 0{,}04} = \frac{40 \cdot 6{,}5 \cdot 10^6}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}6^2 \cdot 10^8} = \frac{65}{13} = 5\ м/с^2$

Что означает передвигаться по поверхности без двигателей? На Земле человек может ~~бежать~~ идти ($v_{max} = 5$ км/ч), бежать ($v_{max} \approx 10$ км/ч), ехать на велосипеде ($v \simeq 20$ км/час) или как-нибудь ещё.

Возьмём скорость велосипеда 18 км/час $= 5$ м/с.

Эта скорость обеспечивается работой силы трения: $\frac{m v_З^2}{2} = S \cdot \mu \cdot N$, $N = m g_З$.

Допустим μ и S (разгонный путь) на Земле и на этой планете одинаковы.

Тогда $\left(\frac{v_З}{v_x}\right)^2 = \frac{g_З}{g_0}$; $g_З \simeq 10\ м/с^2 \Rightarrow$

$v_x = \frac{v_З}{\sqrt{2}} \simeq 3{,}6$ м/с

Ответ: $\sim 3{,}6$ м/с

Задача 2

Обозначим за ГГ - голубой гигант; ГК - голубой карлик; КГ - красный гигант и КК - красный карлик.

Тогда все возможные комбинации звёзд:

ГГ + КК и ГГ + КК
ГГ + КК и КГ + ГК
ГГ + ГК и КГ + КК
ГГ + ГГ и КК + КК

КГ + ГК и ГГ + КК
КГ + ГК и КГ и ГК
КГ + КГ и ГК + ГК
КГ + ГГ и ГК + КК

(менять местами части "" и "" бессмысленно)

Так же нам известно, что светимости гигантов и карликов равны.

Т.е: $L_1 = L_2$

$$T_1^4 \cdot R_1^2 = T_2^4 \cdot R_2^2$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{R_2}{R_1}$$

Если гиганты (и карлики) имеют одинаковый цвет, то их радиусы попарно равны, это очевидно. Но ~~если~~ что если они имеют разный цвет?

Цвет звёзд определяется температурой ~~кра~~ поверхности.
Красные звёзды имеют $T \sim 3000$ K; Голубые ~ 30000 K.
Тогда, если ~~гиганты имеют р~~ гиганты/карлики имеют разные температуры, то

$$\frac{R_2}{R_1} \approx 100,$$

что невозможно для звёзд одного класса (по размерам). Значит имеют место быть четыре комбинации:

1) ГГ + КК и ГГ + КК
2) КГ + ГК и КГ + ГК
3) КГ + КГ и ГК + ГК
4) ГГ + ГГ и КК + КК

В случае (1) и (2) невозможно точно определить какая из систем старше, т.к. они идентичны. Можно лишь сказать, что голубые карлики являются полугипотетическими объектами (если это БК, проще очень горячий, то есть, если это нечто другое, то пока не обнаружили) и следовательно комбинации (2) и (3) вообще мало вероятны.

В случае (3) система с гигантами моложе, т.к. голубые карлики — объекты после "смерти" (взрыва сверхновой) звёзд;

В случае (4) вероятнее всего старше система с красными карликами, т.к. они живут намного дольше, чем голубые гиганты.

Задача 4

По закону Доплера $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{U}{c}$

Т.к. вероятнее всего оба компонента видны в видимом спектре и у обоих видна линия H_α, мы не можем однозначно сказать каждая из звёзд имеет U, ~~скорость~~ т.к. $U = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$.

Период падений блеска 0,5 лет, а т.к. нам не сказано каких конкретно падений, а луч зрения лежит строго в плоскости орбиты, период орбитального вращения $T = 1$ год.

Мы знаем, что один из компонентов - белый карлик, его масса лежит в пределах $0{,}01M_\odot < m < 1{,}2 M_\odot$.

По III закону Кеплера $T^2(M+m) = (r_1+r_2)^3$;

$2U = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{2\pi r_1}{T} + \frac{2\pi r_2}{T} \rightarrow r_1 + r_2 = \frac{UT}{\pi} =$

Тогда $M = \frac{(r_1+r_2)^3}{T^2} - m = \frac{U^3T^3}{\pi^3 \cdot T^2} - m = \frac{U^3 \cdot T}{\pi^3} - m$. ~~$M = U^3T - m$~~ $(M_\odot)$,

$\frac{U}{\pi} = \frac{0{,}46\,Å}{6563\,Å} \cdot \frac{3\cdot 10^8}{\pi} \approx 7\cdot 10^3 \frac{м}{c} = 7 \frac{км}{c}$

$\left(\frac{U}{\pi}\right)^3 \cdot T =$ т.к. $2\pi \cdot 1 ае / 1 год = 30$ км/с

7 км/с $\approx$ ~~0,2 ае/год~~ $1{,}5$ ае/год $\Rightarrow M = U^3T - m$

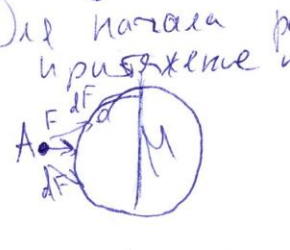
$\frac{U^3 \cdot T}{\cancel{\pi}} = \frac{3{,}4 \cdot 1}{1} \approx 3{,}4$

$3{,}4 M_\odot \geq M \geq 2{,}2\, M_\odot$

Ответ: От $2{,}2\, M_\odot$ до $3{,}4\, M_\odot$

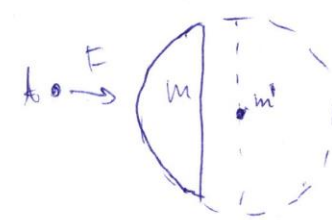
Задача 5

Для начала рассмотрим сферически симметричный шар и притяжение к нему:



Нас притягивает каждый кусочек шара массы dm, с силой dF, причем dF направлены в разные стороны.

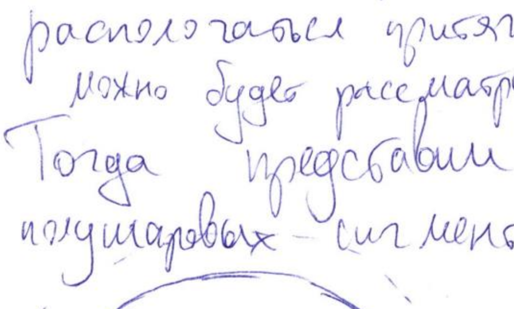
Но известно, что интеграл от такого сводится к притяжению ~~как~~ как от точки массы M, расположенной в центре этого шара. Если мы сейчас распилим шар пополам так что ~~вдоль~~ с точки зрения объекта в точке A полушар всё ещё будет симметричен, то нетрудно догадаться, что и сейчас можно заменить притяжение от полушара притяжением от точки в центре с массой $M/2$. Аналогичными рассуждениями можно прийти к притяжению от части ~~сферы~~ шара с массой m:

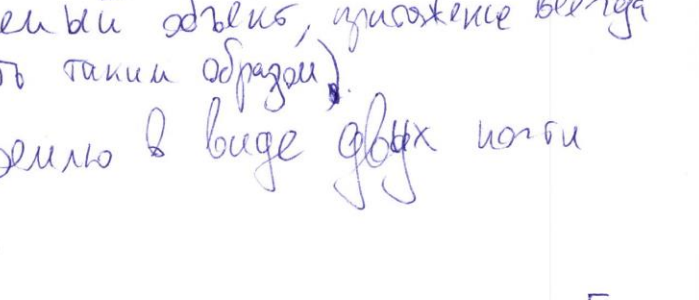


(можно по-честному проинтегрировать, но это крайне долго и сложно, поэтому давайте удовлетворимся таким нестрогим док-вом)

На самом деле не важно где будет располагаться притягиваемый объект, притяжение всегда можно будет рассматривать таким образом).

Тогда представим Землю в виде двух почти полушаровых сегментов:





Очевидно что $d \ll r$ $(r > R_3)$.

(т.к. иначе эта модель была бы совершенно неверной). Тогда

$\alpha \approx \beta = \frac{d}{2r}$ (т.к. углы крайне малы) и поэтому F пусть всё же будет направлена к центру O, из иох. отсчитываем φ.

Из теоремы косинусов для двух треугольников:

$r_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{d}{2}\cdot r\cdot\cos(90-\varphi) = r^2\left(\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + 1 - \frac{d}{r}\cdot\sin\varphi\right)$

$r_2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{d}{2}r\cos(90+\varphi) = r^2\left(\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + 1 + \frac{d}{r}\sin\varphi\right)$

$\boxed{\text{Исб-06 Страница 6 из 7}}$

Итоговая сила $F = \frac{GM_\oplus \cos\alpha}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) =$

$= \frac{GM_\oplus}{2r^2}\left(1-\left(\frac{d}{2r}\right)^2\right)\left(\frac{2+2\left(\frac{d}{2r}\right)^2}{1+2\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d^2}{r^2}\sin^2\varphi}\right) = \left(\text{пренебрежём } \left(\frac{d}{r}\right)^3 \text{ и } \left(\frac{d}{r}\right)^4, \text{ т.к. } d << r\right)$

$= \frac{GM_\oplus}{r^2}\left(\frac{1-\left(\frac{d}{2r}\right)^4}{1+2\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d^2}{r^2}\sin^2\varphi}\right) = \frac{GM_\oplus}{r^2}\left(\frac{1}{1+2\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \left(\frac{d}{r}\sin\varphi\right)^2}\right)$

Но это зависимость $F(\varphi; r)$, а нам дана зависимость потенциала $V(\varphi; r)$. То же самое можно проделать и с ними:

$V = \frac{GM_\oplus \cos\alpha}{2r_1} + \frac{GM_\oplus \cos\alpha}{2r_2} = \frac{GM_\oplus}{2r}\left(\sqrt{1-\left(\frac{d}{2r}\right)^2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + 2\frac{d}{2r}\sin\varphi} + \sqrt{1+\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - 2\frac{d}{2r}\sin\varphi}}{\sqrt{1+2\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - 4\left(\frac{d}{2r}\right)^2\sin^2\varphi}}\right)$

Т.к. $d << r$; $\left(1+\frac{d}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{d}{r}$ и аналогично для др. выражений.

Тогда $V = \frac{GM_\oplus}{r}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{d}{2r}\right)^2(1-2\sin^2\varphi)}$. Приравняем это к выражению из условия и найдём d:

$\cancel{\frac{1}{1+\left(\frac{d}{2r}\right)^2(1-2\sin^2\varphi)}} = 1 - \boxed{J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi - 1}{2}}$

$1 = (1-\square)(1+\Delta) \Rightarrow 0 = -\square + \Delta - \Delta\cdot\square$

$\square = \Delta(1-\square)$.

$J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\cdot\frac{3\sin^2\varphi - 1}{2} = \left(\frac{d}{2r}\right)^2(1-2\sin^2\varphi)\left(1 - J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi-1}{2}\right)$

$$J_2 \cdot R_\oplus^2 \cdot (3\sin^2\varphi - 1) = d^2(1-2\sin^2\varphi)\left(2 - J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2(3\sin^2\varphi-1)\right)$$

Т.к. орбитальные спутники летают невысоко; $r \approx R_\oplus$

$$J_2 \cdot R_\oplus^2 (3\sin^2\varphi - 1) = d^2(1-2\sin^2\varphi)\left(2 - J_2(3\sin^2\varphi-1)\right)$$

$$J_2 \cdot R_\oplus^2 = d^2\left(\frac{2-4\sin^2\varphi}{3\sin^2\varphi-1} - J_2(1-2\sin^2\varphi)\right)$$

$$\frac{2-4\sin^2\varphi}{3\sin^2\varphi-1} = -\frac{4}{3} + \frac{3{,}33}{\underbrace{3\sin^2\varphi-1}_{\in[-4;2]}} = -\frac{4}{3} + \frac{1{,}11}{\underbrace{\sin^2\varphi-0{,}33}_{\in[-1{,}3;0{,}7]}}$$

J_2 мало, так что $J_2(1-2\sin^2\varphi) \approx 0$

$$\cancel{d \approx \sqrt{\frac{3}{4} J_2} \cdot R_\oplus \Rightarrow}$$

Дальше математические преобразования и численный ответ, которые я не успеваю сделать.