СПБ-202 №1. 1 из 6

По условию ~~зад~~ задачи мы находимся в северном полушарии, а значит дело происходит к северу от зенита $\Rightarrow$ $h_{в.к.} = 90^\circ - \varphi + \delta$; $h_{н.к.} = -90^\circ + \varphi + \delta$

Известно, что $\frac{h_{н.к.}}{h_{в.к.}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h_{н.к.} \cdot 2 = h_{в.к.}$;

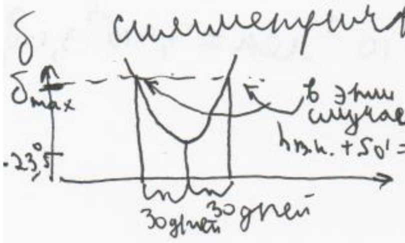
$90^\circ - \varphi + \delta = -180^\circ + 2\delta + 2\varphi \Leftrightarrow \boxed{270^\circ - \delta = 3\varphi}$ 1

Также известно, что 60 дней длилась полярная ночь, по определению - это время, когда Солнце (как объект) не восходит из под горизонта.

Это значит, что: $h_{в.к.} + \underbrace{\cancelto{35'}{0{,}5^\circ}}_{рефр.} + \underbrace{\cancelto{15'}{0{,}25^\circ}}_{уг. рад. Солнца} = h_{в.к.} + \cancelto{50'}{0{,}75^\circ} = h_{в.к.} + 50' \le 0$

Т.е.: $90^\circ - \varphi + \delta_\odot + 50' \le 0 \Leftrightarrow \delta_\odot \le \varphi - 90^\circ - 50' = \varphi - 90{,}83^\circ$

Т.е. нам нужно мин. скл. Солнца. В силу синус. период. характера изменения склонения Солнца отн.-но максимумов или минимумов картина симметрична, а значит: $\delta_{\odot min} = -23{,}5^\circ$ и дальше:



Найдём δ_{max}: $\underbrace{\delta_\odot(t)}_{от\ солнцестояния\ зимнего} = -23{,}5^\circ \cdot \cos(t^\circ_{[дней]})$

В нашем случае: $\delta_{max} = \delta_\odot(30\ дней) = -23{,}5^\circ \cdot \cos(30^\circ) = -23{,}5^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx$

$\approx 0{,}85 \cdot (-23{,}5^\circ) \approx -19{,}98$

Тогда: $h_{в.к.} + 50' = 0 \Leftrightarrow 90^\circ - \varphi + \delta_{max} + 0{,}83^\circ = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ + \delta_{max} + 0{,}83^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi = 90^\circ - 19{,}98 + 0{,}83^\circ \approx 70{,}9^\circ \approx 71^\circ$

Тогда склонение звезды: $\delta = 270^\circ - 3\varphi = 270^\circ - 71^\circ \cdot 3 = \boxed{+57^\circ}$

Ответ: $\delta = 57^\circ$.

№2.

Будем считать засветкой такую ситуацию, когда вследствие дифракционного предела антенны излучение от Солнца будет попадать в ту же точку неба для антенны, что и спутник.

$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot10^{8} м/с}{12\cdot10^{9} с^{-1}} = \frac{1}{40} м \approx 0{,}025 м$

длина волны, на которой передаётся сигнал

Тогда разр. способность антенны:

$\varphi[''] = 2\cdot10^{5}{}''/рад\cdot\frac{\lambda}{D} = 2\cdot10^{5}{}''/рад\cdot\frac{0{,}025 м}{2 м} \circeq$

диаметр телескопа

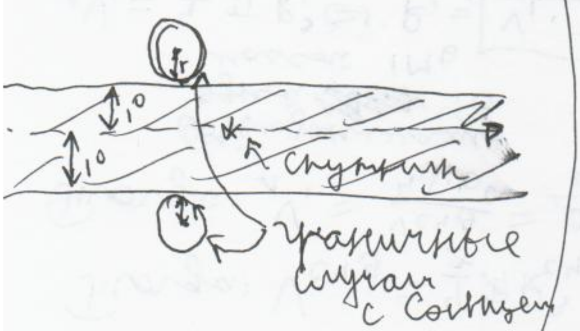
$\circeq 2{,}5\cdot10^{3}{}'' = 2500'' \approx 41{,}5'$. (округлили)

При этом геостац. спутники летают в плоскости экватора Земли ≡ $\delta = 0°$. Спутник будем считать т.ч. объектом со склонением $0°$. Значит Солнце должно быть от него на угловом расстоянии: $\varphi + r_\odot = 41{,}5' + 15' = 57' \approx 1°$

$r_\odot = 15'$ угл. рад. Солнца

т.к. ещё корона

Т.е. на небе это выглядит так:



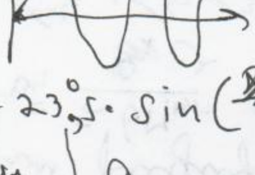
И так как это вблизи экватора ⟺ можем пользоваться плоским приближением:

Чтобы засветки не было:

$\delta \in [-23{,}5°; \delta_{min}] \cup [\delta_{max}; 23{,}5°]$

- $\delta_{min} = -1° - r_\odot = -1° - 15' = -1{,}25°$
- $\delta_{max} = 1° + r_\odot = 1° + 15' = 1{,}25°$

При этом склонение Солнца меняется следующим образом:



Т.к. е. отн-но точек равноденствий ($\delta = 0$) картина симметрична

И $\delta_\odot(t) = 23{,}5°\cdot\sin(t°[дни]) = 1{,}25° \Leftrightarrow \sin(t°[дни]) = \frac{1{,}25}{23{,}5°} \approx 0{,}053$

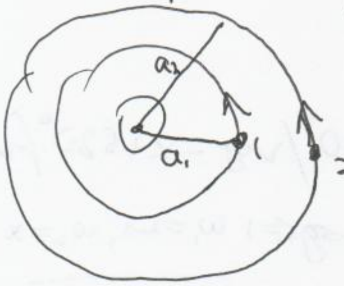
от точки равноденствия

Для малых sin: $\sin(\alpha°) \approx \alpha[рад] \Leftrightarrow t[рад] = 0{,}053 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t[°] \approx 3° \Leftrightarrow t \approx 3$ дня от дня равноденствий, т.е.

№3.

Найдём периоды планет по одной из формулировок 3 з-а КЕПЛЕРА:



$a_1 = \frac{1}{2}$ а. е.

$a_2 = \frac{4}{5}$ а. е.

$\bullet\ \frac{T_1^2\,[\text{года}]}{a_1^3\,[\text{а.е.}]} = \frac{1}{M\,[M_\odot]} \Leftrightarrow \frac{T_1^2}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T_1^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow T_1 = \underset{0,25}{\frac{1}{4}}$ года

$\bullet\ \frac{T_2^2\,[\text{года}]}{a_2^3\,[\text{а.е.}]} = \frac{1}{M\,[M_\odot]} \Leftrightarrow \frac{T_2^2}{\frac{4^3}{5^3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T_2^2 = \frac{32}{125} = \underset{2^8\cdot 10^{-3}}{0,256}$

$\Leftrightarrow T_2^2 = 2^8 \cdot 0,001 \Leftrightarrow T_2 = 2^4 \cdot \cancel{\ } \sqrt{0,001} = 16 \cdot \sqrt{0,001} \approx 16 \cdot 0,033 \approx$

$\approx$ 0,53 года

Теперь рассмотрим осевое вращение планет:
Пусть у первой $|\omega_1| = 2x$, тогда у второй $|\omega_2| = x$
$\underset{\text{угл. скорость 1 планеты}}{}$ $\underset{\text{второй план.}}{}$

При этом сутки – время оборота Солнца по всей небесной сфере, это зависит от вращения вокруг своей оси, от вращения по орбите, а также от того, вращается планета по вращению по орбите или против.

Очевидно, чтобы выполнялась ситуация, где сол. сутки меньше года и чтобы у двух планет были одинаковые, надо как-то уменьшить угл. скорость Солнца на небесной сфере у 1 планеты и увеличить у второй. Единственный способ сделать это – это если планеты будут двигаться в разные стороны вокруг своей оси. Чтобы у одной (у 2) прибавлялась угл. скорость возн. вследствие годового вращения, а у другой (у 1) убавлялась. ~~Всего~~

№3.

Запишем эти угл. скорости:

$\omega_{1\,орб} = 360^\circ / \frac{1}{4}\,года = 1440^\circ/год$; $\omega_{2\,орб} = 360^\circ/T_2 = 360^\circ/0{,}53\,года \approx 680^\circ/год$

$\uparrow T_1$

Тогда: $\omega_1 - \omega_{1\,орб} = \omega_2 + \omega_{2\,орб} \Leftrightarrow 2x - 1440^\circ/год = x + 680^\circ/год$

$\Leftrightarrow 2x - x = 1440^\circ/год + 680^\circ/год \Leftrightarrow x = 2120^\circ/год \Leftrightarrow \omega_1 = 2x;\ \omega_2 = x$

$\Leftrightarrow T_2 = \frac{360^\circ}{\omega_2} = \frac{360^\circ}{x} = \frac{360^\circ}{2120^\circ/год} \approx \boxed{0{,}17\ лет}$; $T_1 = \frac{T_2}{2} = \boxed{0{,}085\ лет}$

Ответ:

№5. (продолжение, начало на странице 6)

Это очень большие скорости, но $\boxed{v<c}$

Поэтому пока что это разрешено.

бонусные аргументы: там бы точно образовались бы рентгеновские источники с аккреционными дисками и мы бы регистрировали излучение, а этого не происходит.

~~Но проблема ещё кроется в том, что если мы возьмём звёзды в центре (ближе к центру)~~

Ответ: нет, не может.

~~Например так, чтобы кол-во звёзд уменьшилось в 1000 раз, т.е. радиус в 10 раз~~

Но проблема ещё кроется в том, что есть такое понятие, как проблема „последнего парсека", она больше применима к СЧД, но на малых масштабах может сработать и с ЧД, и она просто не даст приблизиться чёрным дырам так близко.

Также возникает проблема того, что ЧД двигаются очень быстро, и концентрация на самом деле не маленькая, поэтому вероятность столкновений большая, и ЧД будут сталкиваться и система выйдет из равновесия. –

СПБ-202

№4. O B A F G K M

• ГП ⇒ • $L \sim M^4$ и • $L \sim R^5$; • Т.к. типа Солнца ⇔

⇔ • $M_1 = M_\odot$; • $L_1 = L_\odot$; • $R_1 = R_\odot$; • $m_1 = 4,7$

Т.к. они соприкасаются поверхностями, значит они уже заполнили полость Роша и по сути может наблюдаться перетекание вещ-ва через точку Лагранжа. Но посчитаем упрощенно: по обобщ. 3 з-у Кеплера:

$a_1 = 2R_1 = 2R_\odot$; $R_\odot \approx 7 \cdot 10^8$ м

$x = \frac{2R_\odot}{1,5\cdot10^{11}} = \frac{14\cdot10^8}{1,5\cdot10^{11}} = \frac{1}{100} = 0,01$ а.е.

перевод в а.е.

$$\frac{T^2[\text{года}]}{a^3[\text{а.е.}]} = \frac{1}{\Sigma M[M_\odot]} \Leftrightarrow \frac{T^2[\text{года}]}{\left(\frac{2R_\odot}{1,5\cdot10^{11}}\right)^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{T^2[\text{года}]}{\left(\frac{1}{10^2}\right)^3[\text{а.е.}]} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^6} \Leftrightarrow T = \frac{1}{10^3}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ лет}$$

$T = 0,001 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ лет; $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71 \cdot 0,001$ лет $= 7,1\cdot10^{-4}$ лет $= 7,1\cdot10^{-4}\cdot3,1\cdot10^7$ с

$= \boxed{2,1\cdot10^4 \text{ с}}$ $T \approx 2\cdot10^4$ с ← звёзд типа для Солнца. Ответ:) и ж.

~~Доп. Обознач. Температура выше ≈ 7·10³ 8·10³ K~~

Также, давайте заметим интересный факт:

$$\frac{T^2[\text{года}]}{a^3[\text{а.е.}]} = \frac{1}{\Sigma M[M_\odot]} \Leftrightarrow T^2 = \frac{a^3}{\Sigma M}, \text{ в нашем случае: } T_i^2 = \frac{8\cdot R_i^3}{2\cdot M_i} =$$

$= \frac{4}{\rho_i} \Leftrightarrow T_i \sim \sqrt{\frac{1}{\rho_i}}$, т.е. в нашей задаче период обратно пропорционален корню из плотности звезды. Как мы знаем, плотность растёт если двигаться по спектральным классам ~~слева~~ справа ~~направо~~ налево (т.е. от M → к O). *А значит период для звёзд сп. класса F будет больше, для звёзд спектрального класса K меньше, чем для звёзд типа Солнца-G.

СПБ-202 №5. 6 из 6

Оценим радиус горизонта событий СЧД используя ф-лу Шварцшильда: $R_{вн} = \frac{2GM_{вн}}{c^2} \Leftarrow c = \sqrt{\frac{2GM_{вн}}{R_{вн}}}$; $R_{вн} \approx \frac{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 4,5\cdot 10^{6}\cdot 2\cdot 10^{30}}{9\cdot 10^{16}} =$

$= 1,3\cdot 10^{-11}\cdot 10^{6}\cdot 10^{30}\cdot 10^{-16} = 1,3\cdot 10^{9}$ м

При этом посл. устойчивая орбита для невращ. ЧД (наш случай) $= 3R_{вн}$ $\Rightarrow R_{СЧД} = 3R_{вн} \approx 4\cdot 10^{10}$ м

радиус Шварцшильда

Тогда: $V_{СЧД} = \frac{4}{3}\pi R_{СЧД}^3 = 4\cdot 4^3\cdot 10^{30}\text{ м}^3 \approx 2,6\cdot 10^2\cdot 10^{30}\text{ м}^3 = 2,6\cdot 10^{32}\text{ м}^3 = 0,3\cdot 10^{33}\text{ м}^3$

Тогда: $V_1 = \frac{V_{СЧД}}{4,5\cdot 10^6} = \frac{0,3\cdot 10^{33}\text{ м}^3}{4,5\cdot 10^6} = \frac{0,3}{4,5}\cdot 10^{27}\text{ м}^3 = 7\cdot 10^{-2}\cdot 10^{27}\text{ м}^3 = 70\cdot 10^{24}\text{ м}^3$

объём занимаемый одной ЧД массой $1M_\odot$

• $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \Rightarrow R_1 = \sqrt[3]{\frac{V_1\cdot 3}{4\pi}} = \sqrt[3]{10^{24}\text{ м}^3\cdot\frac{70\cdot 3}{4\pi}} = 10^8\text{ м}\sqrt[3]{\frac{70\cdot 3}{4\pi}} \approx 4,3\cdot 10^8\text{ м} \approx 4\cdot 10^8$ м

радиус, занимаемой одной ЧД $1M_\odot$

• Теперь давайте оценим радиус последней уст. орбиты для ЧД $1M_\odot$: $R_{ЧД} = 3R'_{вн} = \frac{3\cdot 2\cdot G\cdot 1M_\odot}{c^2} = \frac{6\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}}{9\cdot 10^{16}} =$

$= \frac{6\cdot 6,67\cdot 2}{9}\,10^3\text{ м} \approx 9\cdot 10^3\text{ м} \approx 10^4$ м $\boxed{R_1 \gg R_{ЧД}\ ✓}$ ← то есть они не влезают (находятся дальше последней уст. орбиты) ⇒ по этому критерию $\boxed{\text{могут быть}}$

При этом, так как это шаровое скопление из большого кол-ва объектов ⇒ здесь применима теорема о вириале: $2\langle E_{кин}\rangle = -\langle E_{пот}\rangle \Leftarrow$

$\Leftarrow 2\cdot\frac{M_\odot v^2}{2} = +\frac{GM_{СЧД}\cdot M_\odot}{R_{СЧД}}$ ← ЧД на краю скопления

$\Updownarrow$

$v = \sqrt{\frac{GM_{СЧД}}{R_{СЧД}}} < c$ ← ~~другое~~ условие; $v = \sqrt{\frac{GM_{СЧД}}{R_{СЧД}}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 4,5\cdot 10^{6}\cdot 2\cdot 10^{30}}{4\cdot 10^{10}}}$

$= \sqrt{10^{16}\cdot 1,5} \approx 1,2\cdot 10^8$ м/с т.к. ~~$c = 3\cdot 10^8$ м/с~~

~~Значит некоторые объекты в скоплении будут двигаться быстрее скорости света, к тому же они ещё и имеют массу ⇒ по этому условию критерию теории не проходит, а значит также не может быть~~ Ответ: нет, не может.