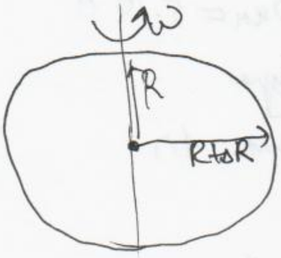
СПб-162

№1.

Для начала решим вспомогательную задачу. Насколько отличаются полярный и экваториальный радиусы?



Запишем равенство потенциалов на полюсе и на экваторе:

$$-\frac{GM}{R} = -\frac{GM}{R+\Delta R} - \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

$$\frac{GM}{R} = \frac{GM}{R+\Delta R} + \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

$$\frac{GM}{R} = \frac{GM}{R} - \frac{GM\Delta R}{R^2} + \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

$$\frac{GM\Delta R}{R^2} = \frac{\omega^2 R^2}{2} \Rightarrow \Delta R = \frac{\omega^2 R^4}{2GM} \Rightarrow M = \frac{\omega^2 R^4}{2G\Delta R}$$

ΔR мы знаем! $\Delta R = 130$ км

$\omega = \frac{2\pi}{T}$; $T = 10$ ч. 1ч $= 3600$ с; $T = 3{,}6\cdot 10^4$ с

$\omega = \frac{2\pi}{3{,}6\cdot 10^4} \simeq 2\cdot 10^{-4}\ с^{-1}$

$T_м = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $g = \frac{GM}{R^2}$; $T_м = 2\pi\sqrt{\frac{l}{GM}}\,R$

$\ln T_м = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{GM}}\right) + \ln R$

Дифференцируя, получаем $\frac{\Delta T_м}{T_м} = \frac{\Delta R}{R}$ $\Big| \Rightarrow R = \frac{\Delta R}{\delta T} = \frac{130}{0{,}02} = 6500$ км $\simeq 7\cdot 10^6$ м $\simeq R_\oplus$

$\frac{\Delta T_м}{T_м} = \delta T_м = 2\% = 0{,}02$

$$M = \frac{\omega^2 R^4}{2G\Delta R} \overset{СИ}{=} \frac{(2\cdot 10^{-4})^2\cdot(6{,}5\cdot 10^6)^4}{2\cdot 7\cdot 10^{-11}\cdot 130\cdot 10^3} \simeq \frac{2\cdot 2\cdot 7^3\cdot 7\cdot 10^{16}}{2\cdot 7\cdot 13\cdot 10^7} = 50\cdot 10^{23} = 5\cdot 10^{24}\ кг \simeq M_\oplus$$

$$\frac{v_{max}^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{\cancel{7}\cdot 10^{-11}\cdot 5\cdot 10^{24}}{\cancel{7}\cdot 10^{+6}}} = \sqrt{5\cdot 10^7} =$$

$$= 7\cdot 10^3\ \frac{м}{с} = \boxed{7\ \frac{км}{с}}$$

№2.

Разрешимы в оптич. диап. ⇒ угл. расстояние между ними

$\rho \geq \frac{\lambda}{D}$, где $\lambda \simeq 550нм \simeq 5\cdot 10^{-7}$ м

D – апертура

оценим её как 1 м

Тогда $\rho \geq \frac{5\cdot 10^{-7}}{1} = 5\cdot 10^{-7}_{рад} = \frac{1}{2\cdot 10^6}\cdot 206265'' = 0{,}1''$

Красный цвет соотв. температуре $T_к \simeq 4\cdot 10^3 K$

Голубой соотв. темп. $T_г = 4\cdot 10^4 K$

Масса гиганта $\gtrsim 20 M_\odot = M_{гиг.}$

Масса карлика $M_{кар} = (0{,}5 \div 1{,}4) M_\odot$

~~Карлики как правило не бывают голубыми, так что~~ Карлики, как правило, не бывают голубыми, так что скорее всего мы имеем дело с двумя голубыми ~~гигантами~~ ~~карликами~~ гигантами и двумя красными ~~гигантами~~ ~~карликами~~ карликами, но проверим на всякий случай.

$L_1 = L_2$ (для карликов) $\Rightarrow R_1{}^2 T_1{}^4 = R_2{}^2 T_2{}^4$

Предположим они разного цвета, тогда $\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 100$

Тогда $\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = 10^6$, но у карликов нет такого разброса по массам. Значит они одинакового цвета. И одинакового радиуса.

~~Tex~~ Значит гиганты тоже одинакового цвета и радиуса.

~~Если в системе будет гигант и карлик~~ В системе не может быть карлик и гигант, потому что, во-первых, голубые гиганты много не живут, это молодые горячие звезды, а красные карлики уже своё пожили, они старые. Во-вторых, если б карлик и гигант были в одной системе, то не получилось бы их разрешить в оптическом диапазоне, они были бы слишком близко.

№2 (продолжение) СПб-162

Итого имеем две системы: I – два голубых гиганта

II – два красных карлика

II система старше.

№3.

Фиолетовому цвету соответствует длина волны $\lambda = 400\text{нм} = 4\cdot 10^{-7}\text{м}$

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c} = \frac{Hr}{c}$$

Красное смещение линий в спектре происходит из-за того, что галактики удаляются. Фиолетовое – из-за того, что приближаются. Но, на самом деле, они не могут приближаться. Это происходит только потому, что относительно солнечной системы они приближаются. А Солнце движется вокруг центра Галактики со скоростью $v = 230\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Тогда минимальное расстояние, начиная с которого у галактик не будет наблюдаться фиолетовое смещение, соответствует расстоянию, на котором радиальная скорость будет равна v.

$$v_r = Hr = v \Rightarrow r = \frac{v}{H} = \frac{230\ \frac{\text{км}}{\text{с}}}{70\ \frac{\text{км}}{\text{с}}}\cdot\text{Мпк} \simeq \boxed{3\ \text{Мпк}}$$

СПб-162

№4.

амплитуда

$\frac{A}{2} = 0,46\,\mathring{A} \Rightarrow A = 0,92\,\mathring{A} = \Delta\lambda$

Т.к. луч зрения находится в орбитальной плоскости, то падение блеска происходят из-за того, что белый карлик перекрывает часть звезды компаньона 1 раз за период.

Тогда период $T = 0,5$ лет

Линия H_α расходится из-за того, что скорость белого карлика направлена то на нас, то от нас

$\frac{2\Delta v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, Δv – скорость белого карлика
$\lambda = 6563\,\mathring{A}$

$$\Delta v = \frac{c}{2}\cdot\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{3\cdot10^8}{2}\cdot\frac{0,92}{6563} \simeq \frac{10^8}{5\cdot10^3} \simeq 2\cdot10^4\,\frac{м}{с} = 20\,\frac{км}{с} = \frac{2}{3}v_\oplus$$

$\Delta v^2 = \frac{G(m+M)}{a}$, m – масса карлика
M – масса звезды-компаньона
a – большая полуось

$$T^2 = 4\pi^2\frac{a^3}{G(M+m)} = 4\pi^2\frac{a^2}{\Delta v^2};\quad T = \frac{2\pi a}{\Delta v}$$ (это если орбиты круговые) но для оценки сойдёт

$$a = \frac{T\Delta v}{2\pi} \simeq \cancel{0,5\cdot365} \frac{0,5T_\oplus\frac{2}{3}v_\oplus}{2\pi} = \frac{a_\oplus}{3} = \frac{1}{3}\,а.е.$$

$$M+m = \frac{4\pi^2a^3}{GT^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}M_\odot = \frac{4}{27}M_\odot \approx 0,15\,M_\odot$$

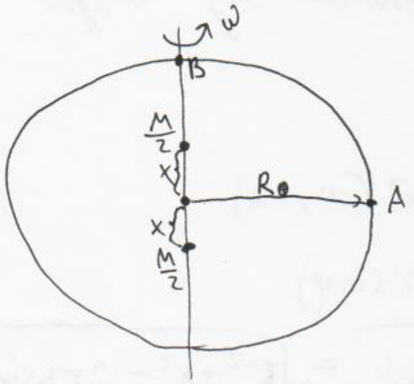
Это довольно мало для звезд. Т.к. звезд с массой $< 10^{-3}M_\odot$ нету, то

$M =$ ~~$10^{-3}M_\odot$ ... $0,001$~~ $(0,001 \div 0,150)M_\odot$

Обе звезды довольно малы и соразмерны по массе. Поэтому оценка немного усложняется, ведь теперь мы знаем, что падение блеска происходит, когда одна звезда перекрывает другую, т.е. каждые полпериода. Тогда $T = 1$ год $= T_\oplus$. $a = \frac{2}{3}$ а.е.

$M+m = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{(1)^2}M_\odot = \frac{8}{27}M_\odot = 0,3M_\odot$. $\quad M = (0,001 \div 0,300)M_\odot$

№5. СПб-162



Решим вспомогательную задачу. Насколько отличаются полярный и экв. радиусы?

Запишем равенство потенциалов на полюсе и на экваторе:

$$-\frac{GM}{R} = -\frac{GM}{R+\Delta R} - \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

$$\frac{GM}{R} = \frac{GM}{R+\Delta R} + \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

Это я вывел на всякий случай, потом это не понадобится

$$\frac{GM}{R} = \frac{GM}{R} - \frac{GM\Delta R}{R^2} + \frac{\omega^2 R^2}{2}, \quad \frac{GM\Delta R}{R^2} = \frac{\omega^2 R^2}{2} \Rightarrow \Delta R = \frac{\omega^2 R^4}{2GM}$$

$$\omega_\oplus = \frac{2\pi}{24\cdot 3600} \simeq \frac{1}{4\cdot 3600} \simeq \frac{1}{1{,}4\cdot 10^4} = \frac{10}{1{,}4}\cdot 10^{-5} = 7\cdot 10^{-5}\ c^{-1}$$

$$R_\oplus = 6\,400\text{ км} \simeq 6\cdot 10^6\text{ м}; \quad M_\oplus \simeq 6\cdot 10^{24}\text{ кг}$$

$$\Delta R = \frac{7^2\cdot 10^{-10}\cdot 6^4\cdot 10^{24}}{2\cdot 6\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}} = \frac{7^2\cdot 6^2}{2}\cdot 10 = \frac{42^2}{2}\cdot 10 = \frac{1600}{2}\cdot 10 = 8\cdot 10^3\text{ м} = 8\text{ км}$$

Запишем потенциал для точки $A(r=R_\oplus, \varphi=0)$

$$V(R_\oplus, 0) = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\right)$$

А теперь через метод советских ~~инж~~ инженеров:

По принципу суперпозиции: потенциал $\Phi = 2\cdot\dfrac{G\cdot\frac{M_\oplus}{2}}{\sqrt{x^2+R_\oplus^2}} = \dfrac{GM_\oplus}{\sqrt{R_\oplus^2+x^2}}$

$x \ll R_\oplus$. Тогда $\Phi \simeq GM_\oplus\left(\dfrac{1}{R_\oplus} - \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{R_\oplus^3}\right) = \dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus}\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{R_\oplus^2}\right)$

Тогда $J_2 = \left(\dfrac{x}{R_\oplus}\right)^2$; $x = R_\oplus\sqrt{J_2} = 6\,400\text{км}\cdot\sqrt{1{,}08\cdot 10^{-3}} \simeq \dfrac{6\,400}{3\cdot 10} \simeq 200\text{ км}$

Расстояние между двумя массами $= 2x = 400$ км

Можно провернуть такие же рассуждения с точкой B.

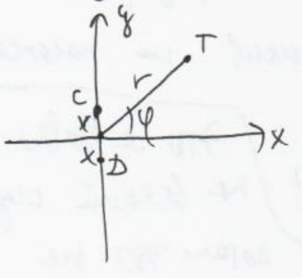
$$V(R_\oplus, 90^\circ) = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus}(1 - J_2)$$

$$\Phi = \frac{G\frac{M_\oplus}{2}}{R_\oplus - x} + \frac{G\frac{M_\oplus}{2}}{R_\oplus + x} = GM_\oplus R_\oplus\frac{1}{R_\oplus^2 - x^2} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus}\frac{1}{1-\left(\frac{x}{R_\oplus}\right)^2} = \cancel{GM_\oplus R_\oplus\left(\frac{1}{R_\oplus^2} + \frac{2x^2}{R_\oplus^3}\right)} =$$

$$= \frac{GM_\oplus}{R_\oplus}\left(1 + \frac{x^2}{R_\oplus^2}\right). \quad J_2 = \frac{x^2}{R_\oplus^2} \Rightarrow x \simeq \cancel{150}\ 200\text{ км} \Rightarrow 2x = 400\text{ км}.$$

Мы получили такой же ответ и теперь можем быть спокойны. И всё же давайте попробуем вывести эту общую формулу!

$$\boxed{\text{СПб-162}}$$



$r \le R_\oplus \qquad C(0, x) \qquad D(0, -x)$

$$T(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$$

$$CT = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi - x)^2} = \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\sin\varphi}$$

$$DT = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi + x)^2} = \sqrt{r^2 + x^2 + 2rx\sin\varphi}$$

$$V(r,\varphi) = \frac{GM/2}{CT} + \frac{GM/2}{DT}, \quad M = M_\oplus$$

$$V = \frac{GM}{2}\left(\frac{1}{CT} + \frac{1}{DT}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2-2rx\sin\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+x^2+2rx\sin\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{r^2-(2rx\sin\varphi-x^2)}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+(2rx\sin\varphi+x^2)}} =$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\frac{1}{2}(2rx\sin\varphi - x^2)}{r^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(2rx\sin\varphi - x^2)^2}{r^5} + \frac{1}{r} - \frac{\frac{1}{2}(2rx\sin\varphi + x^2)}{r^3}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}(2rx\sin\varphi + x^2)^2}{r^5} = \frac{2}{r} - \frac{x^2}{r^3} - 2\cdot\frac{3}{8r^5}\left(4r^2x^2\sin^2\varphi + x^4\right)$$

$$= \frac{2}{r} - \frac{x^2}{r^3} - \frac{3x^2\sin^2\varphi}{r^3} - \frac{3x^4}{4r^5} = \frac{2}{r}\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{3x^2\sin^2\varphi}{2r^2} - \underbrace{\frac{3}{8}\left(\frac{x}{r}\right)^4}_{O(x^4)}\right)$$

$$V = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\,\frac{3\sin^2\varphi + 1}{2}\right) = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - \left(\frac{x}{R_\oplus}\right)^2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi + 1}{2}\right)$$

Если что, я использовал формулу $f(t+\Delta t) \approx f(t) + \frac{f'(t)}{1!}\Delta t + \frac{f''(t)}{2!}\Delta t^2$

У себя я ошибки не вижу, так что смею предположить, что либо в формуле в условии ошибка и должно быть $3\sin^2\varphi + 1$, а не $3\sin^2\varphi - 1$, либо советские инженеры считали не с такой точностью как сейчас.

В любом случае получается, что $\left(\frac{x}{R_\oplus}\right)^2 = J_2$

Тогда расстояние между двумя массами равно $2x = \boxed{400\text{ км}}$