Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-08	№ задачи:	1

Как известно период математического маятника $T \sim g^{-1/2}$, где g - ускорение свободного пад.
Пусть T_e и g_e - период и g на экваторе, а T_p и g_p - период и g на полюсе.

По условию: $\frac{T_e}{T_p} = 1{,}02 \Rightarrow \sqrt{\frac{g_p}{g_e}} = 1{,}02$

Т.к. $g = \frac{GM}{r^2}$, где M - масса планеты, то $g \sim r^{-2} \Rightarrow$

$\frac{g_p}{g_e} = \left(\frac{r_e}{r_p}\right)^2 \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = \sqrt{\frac{g_p}{g_e}} = 1{,}02$, где: r_p - полярный радиус планеты, r_e - экваториальный радиус планеты

Также по условию g на высоте 130 km над полюсом равно g_e. Будем считать, что на планете нет гравитационных аномалий $\Rightarrow$ на одном и том же расстоянии от центра будет одно и то же ускорение св. падения.
Из этих соображений: $r_e - r_p = 130\,km \Rightarrow$

$\frac{r_e}{r_p} = 1{,}02 \Rightarrow 1 + \frac{130\,km}{r_p} = 1{,}02 \Rightarrow 130\,km = 0{,}02\, r_p \Rightarrow$
$\Rightarrow r_p = 6500\,km \Rightarrow r_e = r_p + 130\,km = 6630\,km$.

В первом приближении по планете сложно перемещаться со сколько-нибудь значимой скоростью без включения двигателей. Однако не стоит забывать, что планета сама по себе вращается вокруг оси.

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-08	№ задачи:	1

Пример ситуации, когда скорость вращения планеты может быть использована полностью выглядит так: с бесконечности на экватор планеты падает планетоход и в момент касания поверхности планеты имеет скорость v_e (экваториальная скорость вращения планеты вдоль поверхности. Если каким-то образом аппарат не разобьется и не отскочит то продолжит ехать с той же скоростью без двигателей, пока сила трения не сделает своё чёрное дело. Пример с падением верен без учёта эффектов ОТО, где гравитац. поле увлекается вращением планеты и ответ слегка изменится.

Осталось рассчитать v_e: $v_e = \omega r_e = \frac{2\pi}{T} r_e = 1175$ м/с.

Если принимать все данные из условия как бесконечно точные, то на погрешность определения v_e влияет точность π, взятого $= 3{,}14 \Rightarrow v_e \approx 1180$ м/с

Ответ: 1,18 км/с

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-08	№ задачи:	2

Рассмотрим случаи:

(I) ~~красные звёзды находятся на ГП миллиарды лет~~ Звёзды, перед тем как сойти с ГП и превратиться в красного гиганта находятся на ГП миллиарды лет (например - наше Солнце). На стадии гиганта они находятся считанные миллионы лет. Т.е. относительно нормального периода существования звезды, стадия гиганта длится настолько мало, что статистически найти звёздную систему с двумя красными гигантами практически нереально. Ведь небольшая разница в хим. составе, массе и т.д. между компонентами двойной системы приведёт к тому, что звёзды „разминутся" на стадии гигантов. Поэтому I очень маловероятно, ведь звёзды в двойной системы должны быть (за редким исключением) одного возраста.

(II) Т.к. звёзды одного возраста, а голубая звезда всё ещё на стадии карлика, то её возраст - миллионы - десятки миллионов лет. В то время как красный гигант уже стал гигантом, его возраст должен быть значительно больше ⇒ противоречие, такого быть не может

(III) Красному карлику чтобы из состояния протозвезды выйти на ГП требуются миллионы лет, за это время голубая звезда может пройти стадию ГП, гиганта и превратиться в нейтронную звезду, ЧД и т.д. Поэтому одновременно эти звёзды быть в двойной системе очень вряд ли могут быть

(IV) Пара голубых гигантов - такие вещь нечастая из-за своих коротких сроков жизни и ещё более коротких сроков нахождения на стадии гигантов. Однако отно-

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-08	№ задачи:	2

Так как понятие „голубой карлик" не является ~~...~~ общепринятым термином в астрономии, для дальнейшего использования определим голубые карлики как голубые звёзды V - ~~...~~VI классов светимости.

Известно из условия, что светимости двух карликов совпадают. Светимости красных карликов и голубых могут различаться в тысячи раз, поэтому карлики обязаны быть одноцветными: 2 красных или 2 синих.

То же касается и гигантов.

В таком случае имеем 4 возможных расстановки звёзд. Пронумеруем их римскими цифрами.

I { кр. гигант + кр. гигант
  { г. карлик + г. карлик

II { кр. гигант + г. карлик
  { кр. гигант + г. карлик.

III { г. гигант + кр. карлик
  { г. гигант + кр. карлик.

IV { г. гигант + г. гигант
  { кр. карлик + кр. карлик

кр - красный
г. - голубой

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-08	№ задачи:	2

мения этих времён меньше, чем у (I) и мне известны пары ЯГП (ярких голубых переменных, являющихся в голубыми гигантами) в туманности Тарантула в Магеллановом облаке. Так что они встречаются. Что до пары красных карликов – это не есть что-то необычное для Галактики.

⇒ IV – лучший вариант. Красные карлики очевидно старше

Ответ: голубой гигант + голубой гигант
красный карлик + красный карлик

Система красных карликов старше из-за малого времени существования голубых гигантов.

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-08	№ задачи:	3

За неимением лучшего, представим себе некую галактику на расстоянии r от Млечного пути, которая падает на Млечный путь. Будем также считать, что падает она „с бесконечности", т.е. имеет в каждый момент времени вторую космическую скорость $v=\sqrt{\frac{2GM}{r}}$, где M – масса Млечного пути.

Фиолетовое смещение перестанет наблюдаться когда даже такие галактики (гравитационно связанные, движущиеся только радиально на нас) будут двигаться со скоростью $\leq H\cdot r$. Найдём эту границу приравняв скорости:

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{r}}=Hr \Rightarrow r^3=\frac{2GM}{H^2}$$

Пусть $H=72\ км/с\cdot Мпк \approx 2{,}3\cdot10^{-18}\ с^{-1}$

Количество звёзд в Млечном пути $\sim 10^{10}-10^{11}$, со средней массой около $1M_\odot$. Учитывая присутствие тёмной материи, можно смело брать $M\sim10^{11}M_\odot$, помня что погрешность M приблизительно равна M, т.е. около 100%.

$G=6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{м^3}{кг\cdot с^2}$

Тогда $= r=\sqrt[3]{\frac{2GM}{H^2}}\approx 1{,}6\cdot10^{22}м \approx 5Мпк$; что неплохо соотносится с размерами Местной группы галактик из которых практически все (М31 и М33 - точно) имеют фиолетовое смещение.

Оценим погрешность измерения r от измерения массы:

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мм-08	№ задачи:	3

$$\begin{cases} r \sim \sqrt[3]{M} \\ dr \sim \frac{1}{3\sqrt[3]{M^2}} dM \end{cases} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{dM}{3\cdot\sqrt[3]{M^2}\cdot\sqrt[3]{M}} = \frac{dM}{3M}.$$

Т.к. $dM \approx M$, то $\frac{dr}{r} = \frac{1}{3} \Rightarrow dr = \frac{r}{3} \sim 2$ Мпк

Оценим погрешность r от погрешности H:

Т.к. H измерена довольно точно, но имеет разбежину между $H \approx 68$ км/с·Мпк и $H \approx 76$ км/с·Мпк, возьмём ΔH как 4 км/с·Мпк.

$\Rightarrow \frac{dH}{H} = \frac{1}{17}$

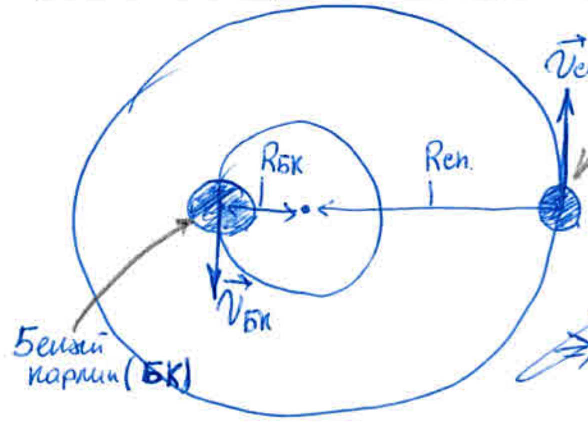
$$\begin{cases} r \sim \frac{1}{H^{2/3}} \\ dr \sim -\frac{2}{3H^{5/3}} \end{cases} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{2}{3H^{7/3}} dH = -\frac{2}{3\cdot 72^{7/3}}\cdot 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow dr \approx -r\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 8^7} \Rightarrow \left|\frac{dr}{r}\right| \ll 1$ и незначительно

(т.к. $\frac{1}{8^6}$ очень мало). $\Rightarrow$ Ответ: при

$r = 5 \pm 2$ Мпк

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-08	№ задачи:	4



Длина волны линии $H_\alpha \approx 650$ нм

~~$\Rightarrow z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{0{,}46 Å}{650 нм} \approx 2{,}1\cdot 10^4$ м/с~~

~~$\Rightarrow v_{БК} =$~~

$$\Rightarrow v_{БК} = zc = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}c = \frac{0{,}46 Å}{650 нм}\cdot 3\cdot 10^8 м/с \approx 2{,}1\cdot 10^4 м/с =$$

$= 21$ км/с — скорость БК относительно центра масс системы.

Т.к. понижения блеска фиксируются с периодом $\tau = 0{,}5^ч$, то период обращения системы $T = 2\tau = 1$ год.

$$v_{БК} = \omega R_{БК} = \frac{2\pi}{T}R_{БК} \Rightarrow R_{БК} = \frac{T v_{БК}}{2\pi} \approx 0{,}5\cdot 10^{11} м \simeq \frac{1}{3} а.е.$$

Из определения центра масс: $\frac{R_{сп}}{R_{БК}} = \frac{M_{БК}}{M_{сп}} \Rightarrow \frac{R_\Sigma}{R_{БК}} = \frac{M_\Sigma}{M_{сп}} \Rightarrow$

$\Rightarrow R_\Sigma = \frac{M_\Sigma}{M_{БК}} R_{БК}$. (где $M_\Sigma = M_{БК} + M_{сп}$ и $R_\Sigma = R_{сп} + R_{БК}$)

В „астрономической" системе единиц (год, а.е., $M_\odot$) выполняется правило (III з. Кеплера): $M_\Sigma = \frac{R_\Sigma^3}{T^2} \Rightarrow M_\Sigma = \frac{M_\Sigma^3 R_{БК}^3}{M_{сп}^3 \cdot T^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{M_{сп}^3}{M_\Sigma^2} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ — в массах Солнца $\Rightarrow 27 M_{сп}^3 = M_\Sigma^2 \Rightarrow \underline{M_{сп} \ll M_\Sigma} \Rightarrow$

$\not\Rightarrow M_{сп} \ll M_{БК} \Rightarrow$

$$27 M_{сп}^3 = (M_{сп} + M_{БК})^2 = M_{сп}^2 + M_{БК}^2 + 2M_{сп}M_{БК} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 27 M_{сп} = \left(1 + \left(\frac{M_{БК}}{M_{сп}}\right)^2 + \frac{2M_{БК}}{M_{сп}}\right)$. Т.к. $x = \frac{M_{БК}}{M_{сп}} \ll 1$, то

$$27 M_{сп} = 1 + \frac{2M_{БК}}{M_{сп}} + \frac{2M_{БК}}{M_{сп}} = 1 + \frac{4M_{БК}}{M_{сп}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27 M_{сп}^2 - M_{сп} - 4M_{БК} = 0$$

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-08	№ задачи:	4

Решим квадратное уравнение, учитывая, что масса > 0:

$$M_{сп} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16 M_{бк} \cdot 27}}{2 \cdot 27}$$ – в массах Солнца.

Как известно $M_{бк} < 1{,}44 M_\odot$ – предел Чандрасекара.

Характерно также, что большинство $M_{бк} \geq 1 M_\odot$.

Давайте и возьмём эти значения как пределы на $M_{бк}$.

При $M_{бк} = 1$: $M_{сп} = \frac{1 \pm \sqrt{1+16 \cdot 27}}{2 \cdot 27} \approx \frac{4\sqrt{27}}{2 \cdot 27} = 2 \cdot \frac{\sqrt{27}}{27} \approx 2 \cdot \frac{5}{25} =$

$= \frac{2}{5} M_\odot = 0{,}4 M_\odot$

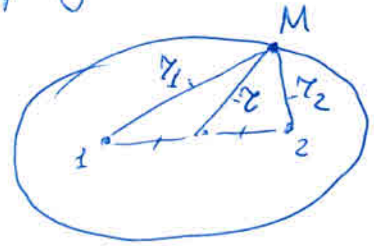
При $M_{бк} = 1{,}44$: $M_{сп} = \frac{1 \pm \sqrt{1+16 \cdot 1{,}44 \cdot 27}}{2 \cdot 27} \approx \frac{\sqrt{23 \cdot 27}}{2 \cdot 27} \approx \frac{25}{2 \cdot 27} \approx 0{,}5 M_\odot$

Таким образом $0{,}4 M_\odot < M_{сп} < 0{,}5 M_\odot$, без учёта погрешностей расчётов и допущений при расчётах. Типичный красный карлик.

Ответ: между $0{,}4 M_\odot$ и $0{,}5 M_\odot$

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-08	№ задачи:	5

В некотором приближении Землю можно представить эллипсоидом. Тогда логично было бы разместить равные массы в каждом из фокусов.



~~Тогда скор~~

Представим плоский случай. В нём гравитационный потенциал в точке M складывается из двух: $\frac{GM}{r_1}+\frac{GM}{r_2}$, где r_1 и r_2 — расстояние до фокусов, r — расстояние до центра

Из уравнения эллипса можно получить:

$$V(r,\varphi) = \frac{GM}{r}\left(\frac{r}{r_1}+\frac{r}{r_2}\right) = \frac{GM}{r}\cdot\frac{2r(r_2+r_1)}{r_1 r_2} = \frac{GM}{r}\cdot\frac{2ra}{r_1 r_2},$$

где a — большая полуось эллипса.

$$\frac{GM}{r}\cdot\frac{2ra}{r_1 r_2} = \frac{GM}{r}\cdot\frac{2ra(1+e\sin\alpha+e\cos\alpha+e^2\sin\alpha\cos\alpha)}{a^2(1-e^2)^2} =$$

$$= \frac{GM}{r}\left[1-J_2\frac{R_\oplus^2}{r^2}\cdot\frac{3\sin^2\varphi-1}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2ra(1+e\sin\alpha+e\cos\alpha+e^2\sin\alpha\cos\alpha)}{a^2(1-e^2)^2} = 1-J_2\frac{R}{r^2}\cdot\frac{3\sin^2\varphi-1}{2}$$