Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-07	№ задачи:	1

① Начнём решение с того, что запишем формулу периода колебаний математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l – длина маятника, g – ускорение св. падения.

Для полюса: $T_П = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{GM}{R^2}}}$, т.к. $g = \frac{GM}{R^2}$ для пов-сти Земли.

Для экватора: $T_Э = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{GM}{R^2}-\omega^2 R}}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – угловая частота вращения Земли.

Поясню откуда это взялось. На экваторе помимо притяжения ещё действует сила инерции $m\omega^2 r$. II-й з-н Ньютона: $ma = mg - m\omega^2 r$. Запишем a как g^*: $g^* = g - \omega^2 r$ – новое ускорение св. падения. Тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}}$ ☒.

По условию: $T_Э = 1{,}02\, T_П$. $\sqrt{\frac{R^2}{GM}}\cdot 1{,}02 = \sqrt{\frac{1}{\frac{GM}{R^2}-\omega^2 R}}$ (1). При подъёме маятника на полюсе на $h = 130$ км период становится равным: $T_П' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{GM}{(R+h)^2}}}$. По условию, он равен $T_Э$: $\sqrt{\frac{(R+h)^2}{GM}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{GM}{R^2}-\omega^2 R}}$ (2). Нам нужно найти $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, т.к. это минимальная скорость движения по поверхности планеты. Приравняв (1) и (2), получим: $1{,}02 \cdot R = (R+h) \Rightarrow \boxed{R = 6500\text{ км}}$. Далее, преобразуем ур-е (2), учитывая $\cancel{v^2 = \frac{GM}{R}}$: $v^2 = \frac{GM}{R}$: $\frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R$. h по сравнению с R – мало, поэтому $\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} \approx 1 - \frac{2h}{R}$. $\frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{2h}{R}\right) = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R \Rightarrow \frac{2GMh}{R^3} = \omega^2 R \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\omega^2 R^3}{2h}}}$.

$v = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{125\cdot 10^{7}}{2}} = \frac{250\cdot 2\pi h}{T} = 50\pi \cdot 130 \frac{км}{ч} = 19500 \frac{км}{ч} \approx 4{,}5 \frac{км}{с}$.

Ответ: $v = 19500 \frac{км}{ч}$.

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-07	№ задачи:	2

(2) Начнём с того, что в задаче рассматриваются 4 типа звёзд:

Красные карлики: $R \approx 5 R_{Юпитера}$, $T \approx 2500K$

Красные гиганты: $R \approx 100 R_{\odot}$, $T \approx 3000K$

~~Красные~~ Синие карлики: $R \sim R_{\odot}$, $T \sim 10000K$

Синие гиганты: $R \sim 100 R_{\odot}$, $T \sim 10000K$.

Нам нужно определить в какой конфигурации эти звёзды можно различить в оптическом диапазоне. Учтём, что светимости равны: $R_1^2 T_1^4 = R_2^2 T_2^4$. Это соотношение можно записать и для карликов, и для гигантов. Очевидно, что светимость красного карлика не может быть равна светимости красного гиганта, то же самое и с синими звёздами, поэтому карлики и гиганты должны быть одного цвета. Исходя из условия, у нас остаётся две конфигурации: (1) Синий карлик - Синий карлик + Красный гигант - Красный гигант.

(2) Синий карлик - Красный гигант + Синий карлик - Красный гигант. Я отбросил системы с красными карликами и синими гигантами, т.к. в природе они практически не встречаются и являются крайне неустойчивыми. И ~~системы~~ конфигурации (1), и ~~системы~~ конфигурации (2) имеют право на жизнь, т.к. оба существуют в опт. диапазоне и их вполне можно разрешить. Только вот разрешить два синих карлика было бы проблематично ввиду малых размеров, да и встречаются они редко. В любом случае, в (1) конфигурации старшие системы синий карлик — синий карлик, а в конфигурации (2) — нельзя определить, т.к. они по своей сути одинаковы. В ответе я оставлю конф. (2), т.к. она чаще встречается.

Ответ: синий карлик - красный гигант; синий карлик - красный гигант; неизвестно какая старше.

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-07	№ задачи:	3

③ Поскольку не должно наблюдаться доплеровское смещения, то галактика относительно нас должна покоиться. Такое может происходить только если она удаляется от нас с такой же скоростью, с которой мы к ней приближаемся. Тут может быть два подхода. Оценить с точки зрения Солнечной системы и с точки зрения Млечного пути, используя закон Хаббла. В первом случае: $v_{солн} \approx 220 \frac{км}{с} = 72 \cdot r \Rightarrow r \approx 3$ Мпк. Скорость Млечного пути в пространстве я не помню, но точно такая же формула будет и для этого случая: $r = \frac{v^{пути}_{М. млеч.}}{H_0}$. Могу предположить, что ~~поскольку~~ дисперсия скоростей галактик примерно равна $200 - 250 \frac{км}{с}$, поэтому существенной разницы быть не должно.

Ответ: $r \approx 3$ Мпк.

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-07	№ задачи:	4

④ Исходя из условия задачи, вторая звезда является самым маломассивным карликом, т.к. излучает в линии $H\alpha$, то есть в ней горит водород, и также в оптическом диапазоне спектра. По формуле Доплера вычислим скорость компоненты: $\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$, где $\lambda_0 = 6563 Å$ — лабораторная длина волны линии $H\alpha$. $v \simeq 40 \frac{км}{с}$. Используя очевидное соотношение, $v = \frac{2\pi a_к}{P}$, где $P = 0{,}5$ лет — период обращения звезды вокруг центра масс, найдём большую полуось звезды. Положим $v_\oplus \approx 30 \frac{км}{с}$, $a_к \approx \frac{2}{3}$ а.е.

III-й з-н Кеплера для двух компонент: $(M_1 + M_2) = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}$, где a — расстояние между звёздами. Его можно выразить из соотношения $M_1 a_к = M_2 a^*$, $a_1 + a^* = a$: $a = \left(1 + \frac{M_к}{M}\right) a_к$. Окончательно: $M = \frac{4\pi^2 a_к^3}{GP^2}\left(1 + \frac{M_к}{M}\right)$, где M — масса белого карлика. Один из пределов может быть наиболее подходящим $M = 1{,}4 M_\odot$ — предел Чандрасекара. Получим $M_к \simeq 0{,}15 \cdot 1{,}4 M_\odot \simeq 0{,}21 M_\odot$.

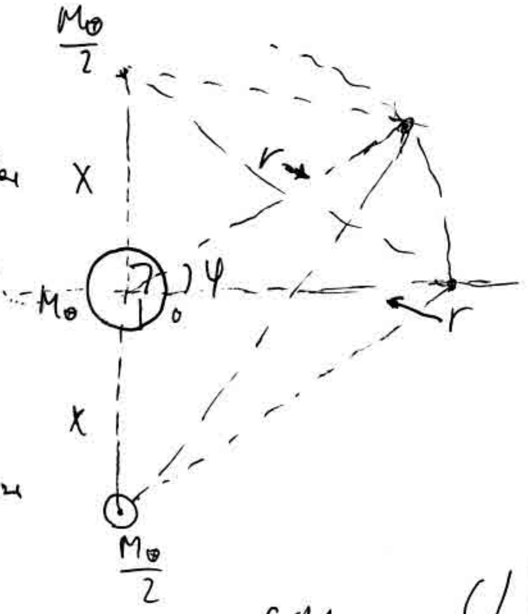
Нижний предел можно сказать на вскидку: для горения водорода звезда не должна быть коричневым карликом, то есть $M \geq 0{,}03 M_\odot$. Таким образом,

$M \in [0{,}03; 0{,}21) M_\odot$.

Ответ: от $0{,}03 M_\odot$ до $0{,}21 M_\odot$.

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-07	№ задачи:	5

(5) Насколько я понял условие, учёные пытались апроксимировать ситуацию Землёй двумя массами, каждая из которых составляет половину Земли и находится на оси вращения Земли. Значит, потенциал, создаваемый в некой точке пространства Землёй и ~~этими~~ массами должны быть равны. Заметим, что при $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ потенциал переходит в обычный потенциал для сферических тел или материальных точек. Запишем эти равенства для $\sin\varphi = 0$ и $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$:



$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}:\quad \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - J_2\frac{R_\oplus^2}{r^2}\cdot\frac{3\cdot\frac{1}{3}-1}{2}\right) = \frac{GM_\oplus}{2\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos(90^\circ+\varphi)}} + \frac{GM_\oplus}{2\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos(90-\varphi)}} \quad (1)$$

(см. рис.).

$$\sin\varphi = 0:\quad \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - J_2\frac{R_\oplus^2}{r^2}\cdot\frac{0-1}{2}\right) = \frac{GM_\oplus}{2\sqrt{r^2+x^2}} + \frac{GM_\oplus}{2\sqrt{r^2+x^2}}. \quad (2).$$

Подставим $\cos(90^\circ+\varphi) = -\sin\varphi$ и $\cos(90^\circ-\varphi) = \sin\varphi$ и сократим:

$$(1):\ \frac{2}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2-2rx\sin\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2+2rx\sin\varphi}};\quad (2):\ \frac{1}{r} + \frac{J_2R_\oplus^2}{2r^3} = \frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}.$$

Выразим r через x из (1) и подставим в (2):

$$\frac{4}{\cancel{r^2}} = \frac{1}{\cancel{r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}+1-\frac{2x}{r}\sin\varphi\right)} + \frac{1}{\cancel{r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}+1+\frac{2x}{r}\sin\varphi\right)} + \frac{1}{\cancel{r^2}\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)^2 - \frac{2x^2}{r^2}\sin^2\varphi}}$$

Принимая в первых двух случаях ~~...~~, что $\frac{x^4}{r^4} \ll 1$, получим

$$4 = 2 + 2\frac{x^2}{r^2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{r^2}+1\right)^2 - \frac{4x^2}{r^2}\sin^2\varphi}};\quad 4\frac{x^4}{r^4} + 8\frac{x^2}{r^2} + 4 - \frac{16x^2}{r^2}\frac{1}{3} = 4\frac{x^6}{r^4} - 8\frac{x^5}{r^5} + 4\frac{x^4}{r^4} + 32\frac{x^6}{r^6}\sin^2\ldots$$

$= 1.$

Пункт проведения:	Минск, Беларусь	Код участника:	Мин-07	№ задачи:	5

$\frac{x^4}{r^4} \ll 1$: $\frac{x^2}{r^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{4} r$.

Подставим в (2):

$$(2) \quad \frac{3}{4x} + \frac{J_2 R_\oplus^2 \cdot 9}{2 \cdot 64 x^2} = \frac{3}{5x}; \quad \frac{3}{20} = \frac{J_2 R_\oplus^2 \cdot 3}{128 x^2}; \quad 2{,}1 = \frac{J_2 R_\oplus^2}{x^2} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{J_2}{2{,}1}} \cdot R_\oplus \approx 128 \text{ км} \quad (R_\oplus = 6400 \text{ км}).$$

Расстояние между массами: $l = 2x = 254$ км

Ответ: 254 км.