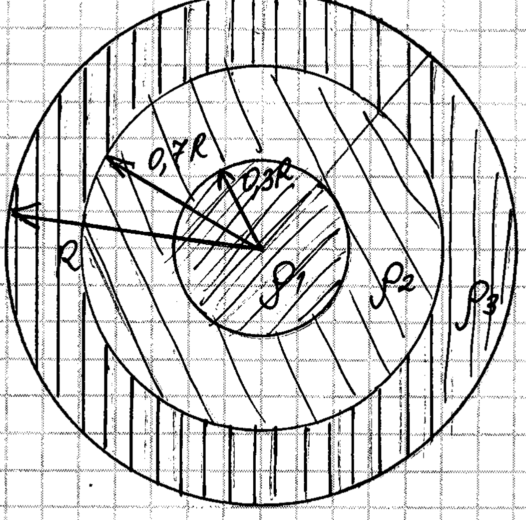
(2) Дано: $\rho_2 = 3000\ \frac{кг}{м^3}$, $\rho_3 = 600\ \frac{кг}{м^3}$, $\rho_{ср} = 1530\ \frac{кг}{м^3}$.

Опред.: ρ_1.

Решение:



Средняя плотность – это отношение всей массы планеты к её полному объёму: $\rho_{ср} = \frac{m}{V}$.

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объём шара.

$m = m_1 + m_2 + m_3$, где

$m_1 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}3R)^3$ – масса ядра.

$m_2 = \rho_2 \left(\frac{4}{3}\pi (0{,}7R)^3 - \frac{4}{3}\pi (0{,}3R)^3\right)$ – масса внутреннего слоя.

$m_3 = \rho_3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}7R)^3\right)$.

Тогда

$$\rho_{ср} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V} = \frac{\rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}3R)^3 + \rho_2 \left(\frac{4}{3}\pi R^3 (0{,}7^3 - 0{,}3^3)\right)}{\frac{4}{3}\pi R^3} +$$

$$+ \frac{\rho_3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 (1 - 0{,}7^3)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 0{,}3^3 \cdot \rho_1 + \rho_2 \cdot (0{,}7^3 - 0{,}3^3) + \rho_3 (1 - 0{,}7^3),$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_{ср} - \rho_2 \cdot (0{,}7^3 - 0{,}3^3) - \rho_3 (1 - 0{,}7^3)}{0{,}3^3} =$$

$$= \frac{1530 - 3000 \cdot (0{,}7 - 0{,}3)(0{,}49 + 0{,}21 + 0{,}09) - 600 \cdot (1 - 0{,}7)(1 + 0{,}7 + 0{,}49)}{0{,}027} =$$

$$= \frac{1530 - 3000 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}79 - 600 \cdot 0{,}3 \cdot 2{,}19}{0{,}027} = \frac{1530 - 3 \cdot 4 \cdot 79 - 6 \cdot 3 \cdot 21{,}9}{0{,}027}.$$

1) 79×12: $158 + 79\text{ (сдвиг)} = 948$

2) $21{,}9 \times 1{,}8$: $1752 + 219\text{ (сдвиг)} = 394{,}2$

~~1530 − 948 − 394,2 =~~

3) $948{,}0 + 394{,}2 = 1342{,}2$

4) $\begin{array}{r} 1530{,}0 \\ -\,1342{,}2 \\ \hline 187{,}8 \end{array}$

$187{,}8 : 0{,}027 = 187800 : 27$

$$\begin{array}{l|l} 187800 & 27 \\ -162 & \overline{6955} \\ \hline \;\;258 & \\ \;-243 & \\ \hline \;\;\;150 & \\ \;\;-135 & \\ \hline \;\;\;\;150 & \\ \;\;\;-135 & \\ \hline \;\;\;\;\;15 & \end{array}$$

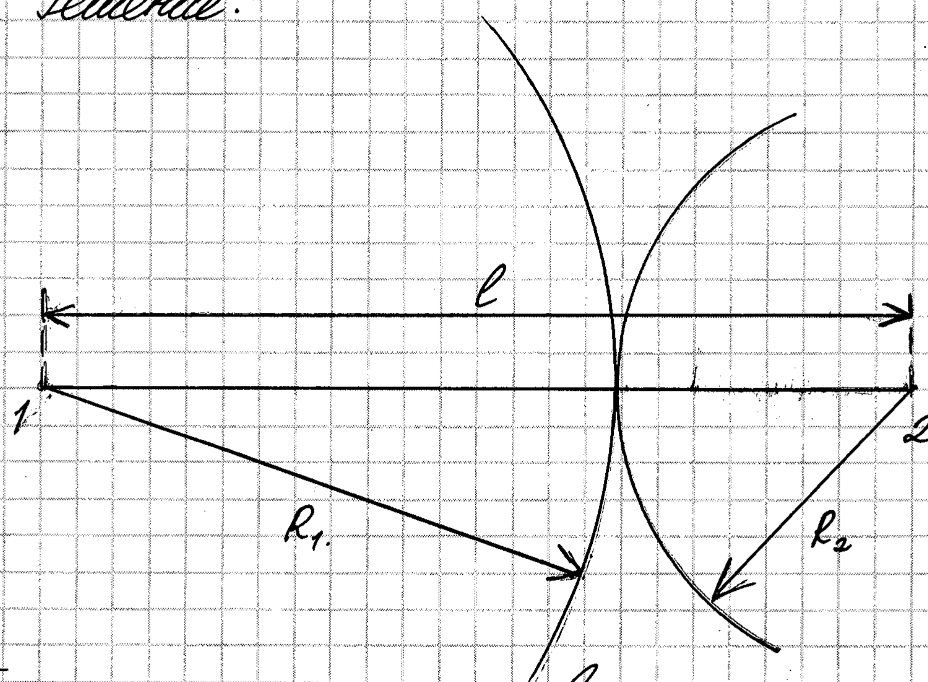
Т.е. $\rho_1 \approx 6960\ \frac{кг}{м^3}$

Ответ: $\rho_1 \approx 6960\ \frac{кг}{м^3}$.

④ Дано: $E_1 = 32 E_2$, $\ell = 300$ пк.

Опред.: τ.

Решение:



Будем считать, что газовая среда однородна, тогда фронт ударной волны имеет сферическую форму радиуса $R = k\ E^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$.

В момент встречи фронтов τ точка касания 2-х сфер лежит на прямой, проходящей через центры сверхновых. Тогда

$$R_1 + R_2 = l;\quad kE_1^{\frac{1}{5}}\tau^{\frac{2}{5}} + kE_2^{\frac{1}{5}}\tau^{\frac{2}{5}} = l;$$

$$kE_2^{\frac{1}{5}}\tau^{\frac{2}{5}}\left(\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{5}}+1\right) l;$$

Расстояние до более мощной сверхновой от точки встречи $r = R_1 = kE_1^{\frac{1}{5}}\tau^{\frac{2}{5}} = \frac{E_1^{\frac{1}{5}}\cdot l}{E_2^{\frac{1}{5}}\left(\frac{E_1^{\frac{1}{5}}}{E_2^{\frac{1}{5}}}+1\right)} =$

$$= \frac{E_1^{\frac{1}{5}}\, l}{E_1^{\frac{1}{5}}+E_2^{\frac{1}{5}}} = \cancel{\frac{l}{1+E}} = l\cdot\frac{\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{5}}+1} = \cancel{l}\, l\cdot\frac{32^{\frac{1}{5}}}{32^{\frac{1}{5}}+1}.$$

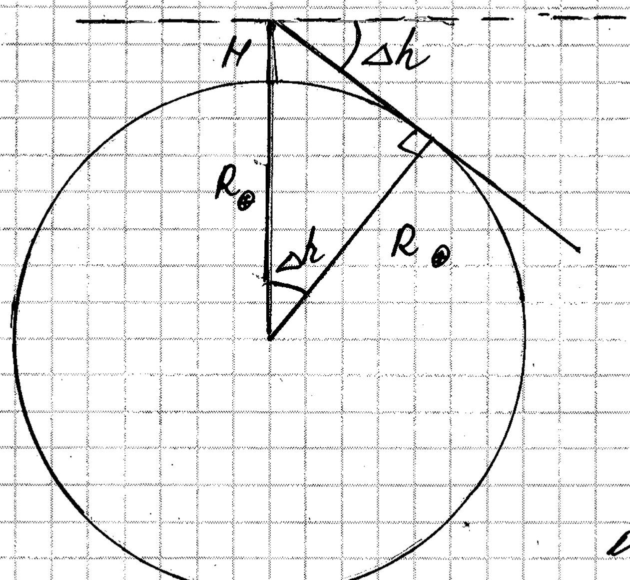
Т.к. $32 = 2^5$, то $r = l\cdot\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}l = \frac{2}{3}\cdot 300\,пк =$
$= 200\,пк.$

Ответ: $r = \frac{2}{3}l = 200\,пк.$

(5) Дано: $H = 442\,м$, $\varphi = 25°$.

Опред.: τ_0 – max.

Решение:



Изменение продолжительности светового дня обусловлено понижением горизонта. Вычислим его.

Из геометрии рисунка:

$$\cos\Delta h = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + H};$$

Т.к. Δh – мал, то можно считать, что в радианах

$\cos\Delta h \approx 1 - \frac{\Delta h^2}{2} = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + H}$; $\frac{\Delta h^2}{2} = 1 - \frac{R_\oplus}{R_\oplus + H} = \frac{H}{R_\oplus + H}$;

$\Delta h^2 = \frac{2H}{R_\oplus + H}$; $\Delta h = \sqrt{\frac{2H}{R_\oplus + H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 442 \cdot 10^{-3}}{6378 + \cancel{442}}} =$

$= \sqrt{\frac{884}{6820}}$

$$\begin{array}{r|l} 8840 & 6820 \\ -6820 & 0{,}129 \\ \hline 20200 & \\ -13640 & \\ \hline 65600 & \\ -61380 & \\ \hline 4220 & \end{array}$$

т.е. $\Delta h \approx \sqrt{0{,}13}$

$\Delta h = \sqrt{\frac{884}{6820}} \approx \sqrt{\frac{800}{6800}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{68}} = \sqrt{\frac{2}{17}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}} =$

$= \frac{1{,}4}{4} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$;

$\Delta h = \frac{7}{20} \cdot 57° \approx 21°$

$\Delta h \approx \sqrt{\frac{2H}{R_\oplus}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 442}{6400 \cdot 10^3}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 400}{6400 \cdot 10^3}} =$

$= \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{64 \cdot 10^3}} = \frac{2}{8}\sqrt{\frac{2}{10^3}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 10^{-1{,}5} \approx \frac{1{,}4}{4 \cdot 10 \cdot \sqrt{10}} =$

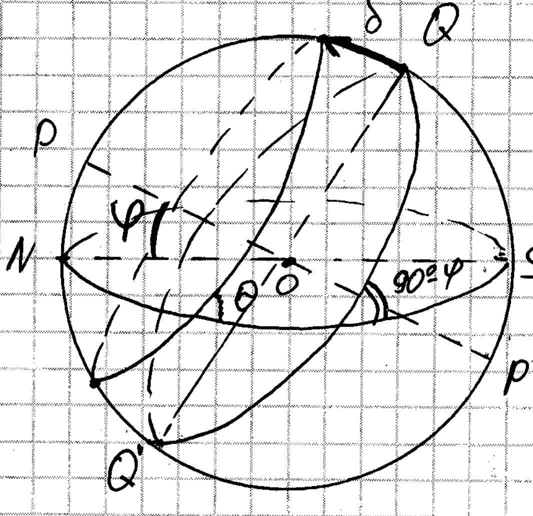
$= \frac{1{,}4}{40\sqrt{10}}$; $\sqrt{10} = \sqrt{1+9} = 3\sqrt{1 + \frac{1}{9}} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \approx$

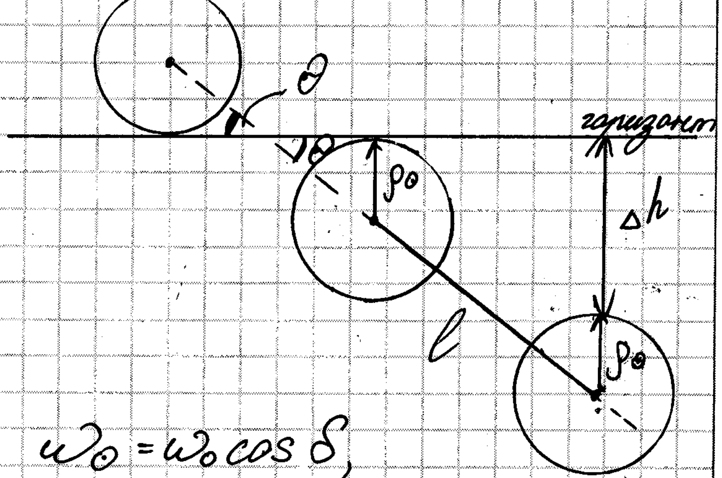
$\approx 3\left(1 + \frac{1}{18}\right) = \frac{19}{6}$.

$\Delta h = \frac{1{,}4 \cdot 6}{40 \cdot 19}$ рад; $\Delta h \approx \frac{1{,}4 \cdot 6 \cdot 57{,}3°}{40 \cdot 19} \approx \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 20} \cdot 3 =$

$= 0{,}63°$

Рассмотрим движение Солнца по небесной сфере. В общем случае Солнце движется по малому кругу, соответствующему склонению δ, длина ко-го относится к длине небесного экватора как $\cos\delta$. $\Rightarrow$





$\Rightarrow$ угловая ск-ть Солнца $\omega_\odot = \omega_0 \cos\delta$,
где $\omega_0 = \frac{360^\circ}{24^ч} = 15\frac{^\circ}{ч}$ - угловая ск-ть движения Солнца по небесному экватору. В результате понижения горизонта видимый путь Солнца до захода увеличился на $l = \frac{\Delta h}{\sin\theta}$ (неважно, до какого момента отсчитывать заход - до полного погружения диска Солнца или прохождения его центра через горизонт; поэтому на τ не влияет и рефракция) - т.к. углы малы, и эту часть небесной сферы можно рассматривать как плоскость.

$\cancel{\&}$ - $\theta \leq 90^\circ - |\varphi| = 90^\circ - \varphi$,

т.к. при $\delta = 0$ $\theta = 90^\circ - \varphi$, а в предельном случае вблизи точки севера Солнце движется параллельно горизонту, и $\theta = 0$.

$$\tau = \frac{l}{\omega_\odot} = \frac{\Delta h}{\sin\theta \cdot \omega_0 \cos\delta},$$

$$\tau_0 = 2\tau = \frac{2\Delta h}{\cos\delta \cdot \omega_0 \cdot \sin\theta} = \underbrace{\frac{2\Delta h}{\omega_0}}_{t_0} \cdot \frac{1}{\cos\delta \cdot \sin\theta}.$$

$$t_0 = \frac{2 \cdot 0{,}63^\circ}{15 \frac{\circ}{ч}} \approx \cancel{2 \cdot 0{,}04\,ч}\ \frac{2 \cdot 0{,}21}{5}\ ч = \frac{0{,}42}{5} \cdot 60\ мин =$$

$$= 0{,}42 \cdot 12\ мин = \underline{5{,}04\ мин}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 42 \\ 12 \\ \hline 84 \\ +\ 42\ \ \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\tau_0 = t_0 \cdot \frac{1}{\cos\delta \cdot \sin\theta}.$$

τ_0 - max, при $\cos\delta \cdot \sin\theta$ - min. Заметим, что $\cos\delta$ и $\sin\theta$ достигают минимума одновременно, когда $\delta = \varepsilon = 23{,}5^\circ$ - летнее солнцестояние (или зимнего солнцестояния при $\delta = -\varepsilon$).

θ придётся оценить как $90^\circ - \varphi$, т.к. точную ф-лу получить сложно. Тогда

$$\tau_0 = 5{,}04\ мин \cdot \frac{1}{\cos 23{,}5^\circ \cdot \cos(90^\circ - 25^\circ)} \approx \frac{5{,}04\ мин}{\cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{5{,}04\ мин}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3} \cdot 5{,}04\ мин = 4 \cdot 1{,}68\ мин \approx 6{,}72\ мин \approx$$

$$\approx 6\ мин\ 40\ с.$$

$$\begin{array}{r} \times\ 1{,}68 \\ 4 \\ \hline 6{,}72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 7{,}2 \\ 6 \\ \hline 43{,}2 \end{array}$$

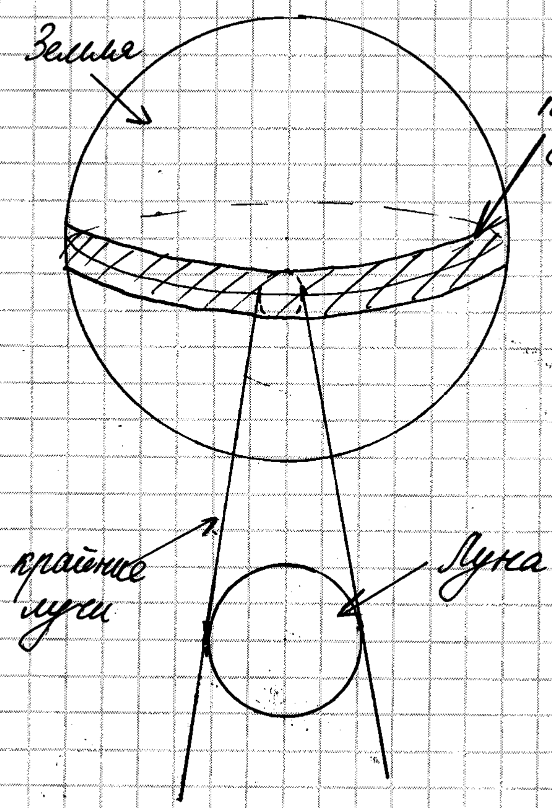
Ответ: $\tau_0 \approx 6$ мин 40 с.

(3) Дано: $r = 160\ \frac{млн.\ детей}{год}$.

Опред.: N.

Решение:

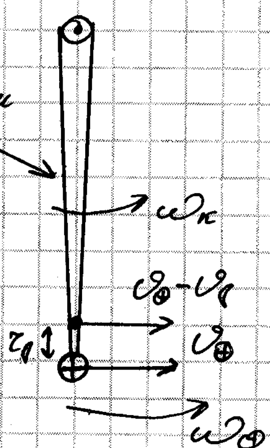
Поскольку требуется оценка, то будем считать, что лунная тень движется вдоль диаметра Земли:

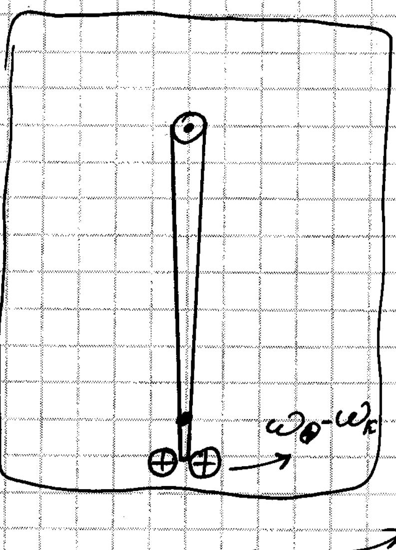


Конус тени вращается вокруг Солнца с угловой ск-тью $\omega_к = \dfrac{v_\oplus - v_☾}{a_\oplus - r_☾}$.

$a_\oplus$ в 400 раз больше $r_☾$. Тогда $\omega_к \approx \dfrac{v_\oplus - v_☾}{a_\oplus}$.

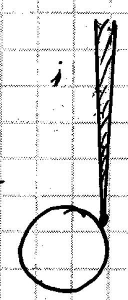
Сама Земля движется с угловой ск-тью $\omega_\oplus = \dfrac{v_\oplus}{a_\oplus}$;





Относительно конуса тени Земля вращается с угловой ск-тью $\omega_\oplus - \omega_к = \dfrac{v_☾}{a_\oplus}$.

За время τ, пока полное солнечное затмение наблюдается хотя бы в одной точке Земли, Земля должна пройти свой диаметр (в нашей оценке сверху) и, строго говоря, диаметр лунной тени на расстоянии α своего центра. Последнюю величину оценить довольно сложно: Земля может войти в конус тени вообще не в своей крайней точке, хотя это не соответствует нашей модели:



На пов-ти Земли размер тени может достигать порядка 200 км, что существенно ниже $D_\oplus = 2R_\oplus = 2\cdot 6400$ км $= 12800$ км. Поэтому можно считать, что

$$\frac{\vartheta_1}{a_\oplus}\cdot\tau = \frac{D_\oplus}{a_\oplus}; \quad \tau = \frac{D_\oplus}{\vartheta_1}$$

↖ угловой размер Земли с Солнца

Средняя ск-ть движения Луны по орбите $\vartheta_0 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_1}} \approx 1\ \frac{км}{с}$. Но орбита Луны эллиптическая с $e_1 = 0{,}055$.

Полное солнечное затмение обычно происходит, когда Луна вблизи перигея своей орбиты: в этом случае её угловой размер > солнечного. Тогда в качестве оценки

$$\vartheta_1 = \vartheta_п = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_1}\cdot\frac{1+e_1}{1-e_1}} = \vartheta_0\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \vartheta_0\sqrt{(1+e_1)(1-e_1)^{-1}} \approx$$

$$\approx \vartheta_0\sqrt{\cancel{x}(1+e_1)^2} = \vartheta_0(1+e_1).$$

$$\tau = \frac{D_\oplus}{\vartheta_0(1+e_1)} \approx \frac{D_\oplus}{\vartheta_0}(1-e_1) = \frac{2\cdot\cancel{6380}\,6400}{1}\cdot(1-0{,}055)$$

$= 12800\cdot(1-0{,}055) = 12800\cdot0{,}945 = 128\cdot945 = 12096\,с \approx$

$$\begin{array}{r} \times\ 945 \\ 128 \\ \hline 7560 \\ +\,1890\ \ \\ 945\ \ \ \ \\ \hline 12096{,}0 \end{array}$$

≈ 12100 с – это оценка сверху.

Число людей, попавших под действие заклятия:

$$N = r\cdot\tau = 160\cdot10^6\cdot\frac{12100}{3{,}15\cdot10^7},$$

т.к. 1 год $\approx 3{,}15\cdot10^7$ с.

$$N = 16\cancel{0}\cdot10^7\cdot\frac{12100}{3{,}15\cdot10^7} = \frac{12100\cdot16}{3{,}15} = 16\cdot\frac{12{,}1}{3{,}15}\cdot10^3 \approx$$

$\approx 16\cdot4\cdot10^3 = 64\cdot10^3 \approx 6{,}4\cdot10^4$ детей. В реальности число будет меньше, т.к. тень не обязательно пройдёт вдоль диаметра Земли от „начала" до „конца".
Если считать, что под действие проклятия попад. только девушки, то $N = \frac{6{,}4}{2}\cdot10^4 = 3{,}2\cdot10^4$.

Ответ: $N \approx \cancel{6{,}4}\ 3{,}2\cdot10^4$ ~~детей~~ людей.

(1) Дано: $l_{экв} = 60\cdot10^3$ км.

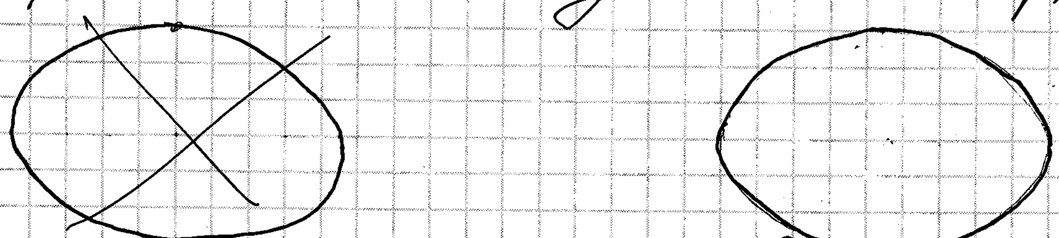
Опред.: R, ч.

Решение:

Полярный и экваториальный радиус Земли отличаются слабо: $R_{пол\oplus}\approx R_{экв\oplus}\approx 6400$ км. Длина экватора Земли – 40 тыс. км.

$$\left.\begin{array}{l} l_{экв\oplus}\approx 40\cdot10^3\text{ км} = 2\pi R_\oplus \\ l_{экв} = 60\cdot10^3\text{ км} = 2\pi R_{экв} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R_{экв}}{R_\oplus} = 1{,}5.$$

Форма планеты – эллипсоид. (сплюснутый шар).



! Нам дали информ. про уск-е на полюсе, чтобы не учит. центробежные силы.

$\cancel{M = \alpha R_{экв}^2 \, R_{пол}}$, $\cancel{g_{пол} = \beta \frac{GM}{R_{пол}^2}}$. $g = \frac{GM}{R^2}$

Если планета шар радиуса $R_{пол} = R_{экв} = R = 1{,}5 R_\oplus$ (вынуждены так считать)

$\frac{GM}{R^2} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$; $M = M_\oplus \cdot \left(\frac{R}{R_\oplus}\right)^2 = 1{,}5^2 M_\oplus = 2{,}25 M_\oplus$.

Запишем III з-н Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{сумм}}.$$

$M_{сумм} \approx M_{планеты}$.

Если подставлять в эту формулу период в сидерических периодах Луны, большую полуось - в расстояниях до Луны, а массу - в массах Земли, то выражение перепишется так: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M}$. По условию $T\,[T_☾] = 1$. Тогда

$a^3 = M = 2{,}25$; $a = \sqrt[3]{2{,}25} = \sqrt[3]{2{,}197 + 0{,}053} = \sqrt[3]{2{,}197\left(1 + \frac{0{,}053}{2{,}197}\right)} =$
$= 1{,}3\left(1 + \frac{53}{2197}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}3\left(1 + \frac{53}{2197 \cdot 3}\right) \approx 1{,}3\left(1 + \frac{50}{2200 \cdot 3}\right) =$
$= 1{,}3\left(1 + \frac{5}{660}\right) \approx 1{,}3$. Т.к. угловой размер спутника такой же, как и у Луны, а расстояние до него в 1,3 раза больше, чем нам до Луны, то и его пространственный размер в 1,3 раза больше: $R = 1{,}3 R_☾ = 1{,}3 \cdot 1738$ км ≈ 2260 км.

$$\begin{array}{r} 1738 \\ \times \quad 1{,}3 \\ \hline 5214 \\ +1738 \\ \hline 2259{,}4 \end{array} \approx 2260 \text{ км}$$

$r = 1{,}3 r_☾ = 1{,}3 \cdot 384400$ км $\approx 5 \cdot 10^5$ км.

$$\begin{array}{r} 38440 \\ \times \quad 13 \\ \hline 115320 \\ +38440 \\ \hline 499720 \end{array}$$

! Считаем, что совпадающие периоды - сидерические (отн-но звёзд), т.к. синодический период спутника мы посчитать не можем

Ответ: $r = 5 \cdot 10^5$ км; $R \approx 2260$ км.