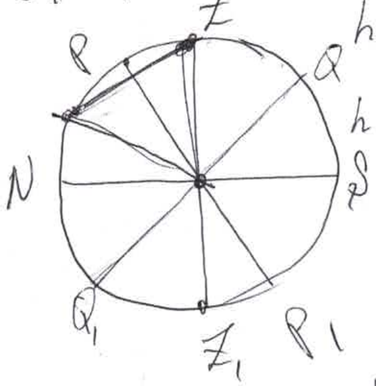
(САМ-15)

(1) $T = 60$ сут. Полярная ночь – явление, когда Солнце ~~не появляется~~ над горизонтом больше 1 суток.

$h_{в.к.} = 2h_{н.к.}$ Минимальная широта, на которой может

$\delta_* - ?$ наблюдаться это явление рассчитывается так:

$h_\odot < 0$ Высота Солнца в верхней кульминации должна быть меньше 0.



$h_{в.к.\odot} = \delta_\odot + 90° - \varphi < 0 \Rightarrow \varphi > 90° - \delta_\odot$

$\varphi > 66{,}5°$ с.ш.

в Северном полушарии в день зимнего солнцестояния $-23{,}5°$

Из условия сказано, что в некотором пункте полярная ночь длилась 60 суток. Очевидно, что середина этого периода соответствует 22 декабря. ($\delta_\odot = -23{,}5°$)

Длится ночь 2 месяца Конец ноября – конец января

$h_{в.к.*} = \delta + 90° - \varphi$ (над т. S)

$h_{в.к.*} = \varphi + 90° - \delta$ (над т. N).

Склонение Солнца в течение года изменяется.

$h_{н.к.*} = \delta - 90° + \varphi$ 23.09 $\delta_\odot = 0$ $\delta = \varepsilon \cdot \frac{2\pi T}{t} \approx -20°$

$-20° + 90° - \varphi < 0$

$\varphi = 70°$ $\Rightarrow \delta_* + 90° - 70° = 2\delta_* - 180° + 2\cdot 70$

$\delta_* = 270° - 3\cdot 70°$

$\delta_* = 60°$ $51° < \delta_* < 60°$

$\cancel{70} + 90 - \cancel{70} = 2\delta_* - 180° + 140°$

$3\delta_* = 180° + 90° - 140° + 70° = 200°$

$\delta_* = 66°$

(2) $\cancel{\alpha} = \frac{1{,}22\lambda}{D}$.

Стр. 1.

③ $M = 2M_{\odot}$

$a_1 = 0{,}5$ а.е.

$a_2 = 0{,}8$ а.е.

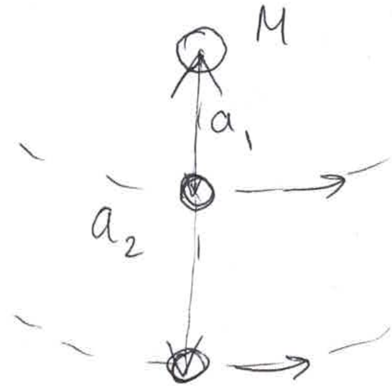
$T_{осв1} < T_1$

$T_{осв1} < T_2$

$T_{осв2} = 2T_{осв1}$

$T_{солн.1} = T_{солн.2}$

$T_{оси\,1};\ T_{оси\,2}$ — ?



САМ-15

по III з. Кеплера: найдём орбитальные (сидерические) периоды планет.

$$\frac{T^2 M}{T_{\oplus}^2 M_{\odot}} = \frac{a^3}{a_{\oplus}^3}$$

($M \to 2M_{\odot}$; $T_{\oplus}^2 M_{\odot} \to 1$; $a_{\oplus}^3 \to 1$)

$$2T^2 = a^3 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{a^3}{2}}$$

Внутр.:

$$\boxed{T_1 = \sqrt{\frac{0{,}5^3}{2}} = 0{,}25\ г.}$$

Внешн.

$$\boxed{T_2 = \sqrt{\frac{0{,}8^3}{2}} \approx 0{,}5\ г.}$$

Продолжительность солнечных суток можно найти по формуле:

$$\boxed{T_{солн.} = \frac{T \cdot T_{оси}}{T - T_{оси}}} \Leftarrow \frac{1}{T_{солн.}} = \frac{1}{T_{оси}} - \frac{1}{T_{орб.}} \quad (\text{против часовой})$$

$$\boxed{T_{солн.} = \frac{T \cdot T_{оси}}{T + T_{оси}}} \Leftarrow \frac{1}{T_{солн.}} = \frac{1}{T_{оси}} + \frac{1}{T_{орб.}} \quad (\text{по часовой})$$

стр. 2

Возможно 3 случая:

1) обе планеты против часовой.

$$\frac{T_1 T_{оси_1}}{T_1 - T_{оси_1}} = \frac{2T_2 T_{оси_1}}{T_2 - 2T_{оси_1}} \Rightarrow \frac{1}{4}T_{оси_1}\left(\frac{1}{2} - 2T_{оси_1}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}T_{оси_1}\left(\frac{1}{4} - T_{оси_1}\right)$$

$$\frac{1}{8}T_{оси_1} - \frac{1}{2}T_{оси_1}^2 = \frac{1}{4}T_{оси_1} - T_{оси_1}^2$$

$$\frac{1}{2}T_{оси_1}^2 + \frac{1}{8}T_{оси_1} - \frac{2}{8}T_{оси_1} = 0$$

$$\frac{1}{2}T_{оси_1}^2 - \frac{1}{8}T_{оси_1} = 0 \quad |\cdot 8$$

$$4T_{оси_1}^2 - T_{оси_1} = 0$$

$$T_{оси_1}(4T_{оси_1} - 1) = 0$$

$T_{оси_1} = 0$ не может быть; $T_{оси_1} = \frac{1}{4}$ г. $\Downarrow$ $T_{оси_2} = \frac{1}{2}$ г.

не подходит по условию

2) обе планеты по часовой.

$$\frac{T_1 T_{оси_1}}{T_1 + T_{оси_1}} = \frac{2T_2 T_{оси_1}}{T_2 + 2T_{оси_1}}$$

$$\frac{1}{4}T_{оси_1}\left(\frac{1}{2} + 2T_{оси_1}\right) = T_{оси_1}\left(\frac{1}{4} + T_{оси_1}\right).$$

$$\frac{1}{8}T_{оси_1} + \frac{1}{2}T_{оси_1}^2 = \frac{1}{4}T_{оси_1} + T_{оси_1}^2$$

$$\frac{1}{2}T_{оси_1}^2 + \frac{2}{8}T_{оси_1} - \frac{1}{8}T_{оси_1} = 0$$

$T_{оси_1} > 0$ не подходит.

3). одна по, другая против (1-против; 2-по)

$$\frac{T_1 T_{оси_1}}{T_1 - T_{оси_1}} = \frac{2T_2 T_{оси_1}}{T_2 + 2T_{оси_1}} \Rightarrow \frac{1}{4}T_{оси_1}\left(\frac{1}{2} + 2T_{оси_1}\right) = T_{оси_1}\left(\frac{1}{4} - T_{оси_1}\right)$$

$$\frac{1}{8}T_{оси_1} + \frac{1}{2}T_{оси_1}^2 = \frac{2}{8}T_{оси_1} - T_{оси_1}^2$$

$$\frac{15}{10}T_{оси_1}^2 - \frac{1}{8}T_{оси_1} = 0$$

$$12T_{оси_1}^2 - T_{оси_1} = 0$$

$$\boxed{T_{оси_1} = \frac{1}{12}\ г.}$$

$$\boxed{T_{оси_2} = \frac{2}{12}\ г.}$$

1 - по; 2 - против

$$\frac{T_1 T_{оси_1}}{T_1 + T_{оси_1}} = \frac{2T_2 T_{оси_1}}{T_2 - 2T_{оси_1}}$$

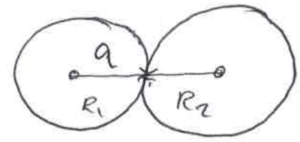
$$\frac{1}{4}T_{оси_1}\left(\frac{1}{2} - 2T_{оси_1}\right) = T_{оси_1}\left(\frac{1}{4} + T_{оси_1}\right) \qquad \frac{15}{10}T_{оси_1}^2 + \frac{1}{8}T_{оси_1} = 0 \quad |\cdot 8.$$

$$\frac{1}{8}T_{оси_1} - \frac{1}{2}T_{оси_1}^2 = \frac{2}{8}T_{оси_1} + T_{оси_1}^2$$

не подходит.

④ $M_1 = M_2 = M$ | (САМ - 15)

$R_1 = R_2 = R$



по III з. Кеплера: $\dfrac{T^2\, 2M}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G}$

1) $M = M_{\odot}$ (G) Как Солнце.

$a = R = R_{\odot} = 7$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot a^3}{2GM}}$$

$$T = \sqrt{\frac{\cancel{4} \cdot 10 \cdot (7 \cdot 10^8 м)^3 \cdot 10^{11}}{\cancel{4} \cdot 10^{30} \cdot 7}} \approx \sqrt{\frac{10^{12} \cdot 10^{24} \cdot 49}{10^{30}}} \approx 7 \cdot \sqrt{10^6}$$

$\approx \underbrace{7 \cdot 10^3 с} \approx 2$ ч.

2) звёзды спектр. класса F

Обычно имеют $M \approx 1{,}3 M_{\odot}$; $R = 1{,}3 R_{\odot}$

$$T = \sqrt{\frac{\cancel{4} \cdot 10 \cdot (1{,}3 \cdot 7 \cdot 10^8 м)^3 \cdot 10^{11}}{\cancel{4} \cdot 1{,}3 \cdot 7 \cdot 10^{30}}} = \sqrt{\frac{10^{12} \cdot 10^{24} \cdot 1{,}3^2 \cdot 49}{10^{30}}} =$$

$\approx \sqrt{10^6 \cdot 7^2 \cdot 1{,}3^2} \approx \underbrace{9 \cdot 10^3 с \approx 10^4 с} \approx 2$ ч.

3) Звёзды спектр. класса K. (оранжевые карлики).

В среднем имеют $M = 0{,}5 M_{\odot}$; $R = 0{,}8 R_{\odot}$

$$T = \sqrt{\frac{\cancel{4} \cdot 10 \cdot (0{,}8 \cdot 7 \cdot 10^8 м)^3 \cdot 10^{11}}{\cancel{4} \cdot 10^{30} \cdot 7 \cdot 0{,}5}} \approx \sqrt{\frac{10^{12} \cdot 10^{24} \cdot 49 \cdot 0{,}25}{10^{30} \cdot 0{,}5}} \approx$$

$\approx 7\sqrt{0{,}5 \cdot 10^6} \approx \underbrace{5 \cdot 10^3 с.}$

Отв. 3

(5) САМ-15

Масса сверхмассивной чёрной дыры в центре Млечного пути $M_{св} = 4,5 \cdot 10^6 M_\odot = 9 \cdot 10^{36}$ кг $\approx 10^{37}$ кг

Предельный радиус чёрной дыры можно найти по формуле:

$$R = \frac{2GM}{c^2} \qquad c^2 = (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{16} \approx 10^{17}$$

Оценим радиус сверхмасс. ч.д.: $R_{св} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{37}}{10^{11} \cdot 10^{17}} = 14 \cdot 10^9 м \approx \underbrace{10^{10} м}$

Чёрные дыры звёздных масс в среднем имеют $M = 3M_\odot$

$M_{зв} = 6 \cdot 10^{30}$ кг

Их предельный радиус будет равен: $R_{зв} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^{30}}{10^{11} \cdot 10^{17}} \approx \underbrace{10^4 м}$

Оценим объём, который занимает сверх. масс. ч.д.

$$V_{св} = \frac{4}{3}\pi R_{св}^3 = 4(10^{10} м)^3 = 4 \cdot 10^{30} м^3$$

Одна же ч.д звёздной массы будет занимать

$$V_{зв} = \frac{4}{3}\pi R_{зв}^3 = 4(10^4 м)^3 = 4 \cdot 10^{12} м^3$$

Теперь посчитаем, сколько же потребуется ч.д. звёздн. масс, чтобы „покрыть" массу сверх. масс. ч.д.

$$n = \frac{M_{св}}{M_{зв}} = \frac{10^{37} кг}{6 \cdot 10^{30} кг} \approx 10^6 шт.$$

Стр. 4

Узнаем, какой объём займут n ч.д $V_{зв}$

$$V = n \cdot V_{зв} = 4 \cdot 10^{12} \cdot 10^6 м^3 = 4 \cdot 10^{18} м^3$$

Для оценки будем считать, что ч.д в шаровом скоплении находятся вплотную. В реальной жизни такого быть не может, и они должны находиться на таком расстоянии, чтобы просто не „слиться" друг с другом.

$$\frac{V_{св}}{V} = \frac{4 \cdot 10^{30} м^3}{4 \cdot 10^{18} м^3} = 10^{12}$$

Поэтому да, может

что во много раз больше V

$$V_{св} \gg V$$