КАЗ-19

№2

Пусть радиус ~~звезды~~ планеты $R$, $\rho_1$ – плотность ядра, $\rho_2$ – плотность внутреннего слоя, $\rho_3$ – плотность внешнего слоя; Тогда из условия задачи, запишем выражение для массы планеты:

$$(1)\quad M = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi(0{,}3R)^3 + \rho_2\left(\frac{4}{3}\pi(0{,}7R)^3 - \frac{4}{3}\pi(0{,}3R)^3\right)$$

$$+ \rho_3\left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(0{,}7R)^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\rho_1(0{,}3)^3 + \rho_2(0{,}7^3 - 0{,}3^3)\right.$$

$$\left.+ \rho_3(1 - 0{,}7^3)\right);$$

С другой стороны, если $\rho_{ср}$ – ср. плотность планеты: $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{ср}$ (2)

Приравняем полученные выражения (1) и (2):

$$\frac{4}{3}\pi R^3\left(\rho_1 0{,}3^3 + \rho_2(0{,}7^3 - 0{,}3^3) + \rho_3(1 - 0{,}7^3)\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{ср}$$

Отсюда получаем выражение для нахождения $\rho_1$:

$$\rho_1 = \frac{\rho_{ср} - \rho_2(0{,}7^3 - 0{,}3^3) - \rho_3(1 - 0{,}7^3)}{0{,}3^3};$$

Подставляя численные значения, получаем численный ответ:

Ответ: $\rho_1 = \dfrac{1530\,\frac{кг}{м^3} - 3000\,\frac{кг}{м^3}\cdot 0{,}316 - 600\,\frac{кг}{м^3}\cdot 0{,}657}{0{,}027} \approx 6950\,\frac{кг}{м^3}$;

Лист № 1

КАЗ-19

№4

Пусть $t$ - момент времени, когда фронты встретятся, $E_{1,2}$ - энергия взрыва 1 и 2 Сверхновой соответственно, $R_{1,2}$ - расстояния до места встречи фронтов от 1 и 2 Сверхновой соответственно, тогда запишем условие задачи:

$E_2 = 32 E_1$ (пусть 2 Сверхновая более мощная)

(1) $R_1(t) \sim E_1^{1/5} t^{2/5}$; (2) $R_2(t) \sim E_2^{1/5} t^{2/5}$;

Также по условию $R_1 + R_2 = 300$ пк;

Поделим выражение (2) на выражение (1):

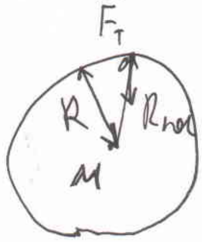
$$\frac{R_2(t)}{R_1(t)} = \frac{E_2^{1/5} \cancel{t^{2/5}}}{E_1^{1/5} \cancel{t^{2/5}}} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/5} = 32^{1/5} = 2 \Rightarrow R_2 = 2R_1$$

Тогда: $R_1 + R_2 = 3R_1 = 300$ пк $\Rightarrow R_1 = 100$ пк $\Rightarrow R_2 = 200$ пк;

Ответ: На расстоянии 200 пк от более мощной Сверхновой;

КАЗ-19

№1




Из закона всемирного тяготения:

(1) $F_T = \dfrac{GMm}{R_{пол}^2} = \dfrac{GM_\oplus m}{R_\oplus^2}$, где M – масса планеты будущего, m – масса человека, $R_{пол}$ – полярный радиус планеты будущего, $M_\oplus$, $R_\oplus$ – масса и радиус Земли соответственно; Также нам известно, что:

$2\pi R_{экв} = 60$ тыс. км, $R_{экв}$ – экваториальный радиус планеты будущего; Причём т.к. полярный радиус и экваториальный радиус реальной Земли примерно одинаковы, то будем считать, что они примерно равны и для планеты будущего, тогда из выражения (1):

$$M = M_\oplus \frac{R^2}{R_\oplus^2} = M_\oplus \left(\frac{2\pi R}{2\pi R_\oplus}\right)^2 = 6\cdot 10^{24}\,кг \cdot \left(\frac{60\cdot 10^3\,км}{40\cdot 10^3\,км}\right)^2$$

$$= 6\cdot\frac{9}{4}\cdot 10^{24}\,кг = 1{,}35\cdot 10^{25}\,кг;$$

Из III закона запишем равенство периодов обращения Луны и малой планеты:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_☾^3}{GM_\oplus}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}},$$ где $r_☾$ – радиус орбиты Луны; $r$ – планеты и Луны

~~Т.к.~~ Т.к. масса Луны $\ll$ масс планет;

а $r$ – радиус орбиты малой планеты;

Тогда: $r = r_{\text{Л}} \sqrt[3]{\frac{M}{M_{\oplus}}} = 4\cdot10^5\,км \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \approx 4\cdot10^5\,км\cdot1{,}3 =$

$= 4{,}9\cdot10^5\,км$; Равенства видимых размеров $\Leftrightarrow$

равенству угловых размеров, т.е.:

$$\frac{2R}{r-R} = \frac{2R_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}-R_{\oplus}},\ \text{т.к. } r \gg R,\ \text{а } r_{\text{Л}} \gg R_{\oplus}\ ;$$

, где $R$ – радиус малой планеты

$$R = R_{\text{Л}}\frac{r}{r_{\text{Л}}} \approx 1{,}3\cdot1700\,км = 2200\,км;$$

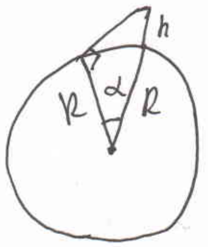
(размер)

Т.е. диаметр малой планеты $D = 2R = 4400\,км$;

Ответ: $r = 4{,}9\cdot10^5\,км$; $D = 4400\,км$;

№5

Оценим понижение горизонта для наблюдателя ~~на~~ в ресторане:




$\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$, где $R$ - радиус земли, а $h$ - высота ресторана;

Т.к. угол $\alpha$ малый, воспользуемся приближением $\cos\alpha$:

$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{6371000\,м}{6371442\,м}$, где $\alpha$ - выражен в рад.

Тогда $\alpha^2 = \frac{884\,м}{6371442\,м}$; Зная, что 1 рад $= 206265''$,

получаем: $\alpha^2 = \frac{884 \cdot 206265^2}{6371442} \approx \frac{884 \cdot 4 \cdot 10^{10}}{6{,}4 \cdot 10^6} \approx 2 \cdot 10^7$,

где $\alpha$ выражено в угл. секундах, тогда $\alpha \approx 4200'' \approx 1{,}^\circ 22$;

Разница между продолжительностью дневного поста на уровне моря и в ресторане, равна удвоенной разности между восходом/заходом в этих пунктах;

Тогда напишем выражение для этой разницы:

$\Delta t = \frac{2\alpha}{\omega \cos\delta_\odot \sin\varphi}$, где $\omega = \frac{2\pi}{T_s} \approx 15^\circ/ч$ - угловая скорость точки на небесном экваторе, $23^h 56^m 01^s = T_s$, $\delta_\odot$ - склонение Солнца, $\varphi$ - широта Дубая;

КАЗ-19

Причём максимум $\Delta t$ достигается при

максимуме $|\delta_\Theta| \Rightarrow \delta_\Theta = \pm\varepsilon = \pm 23{,}5^\circ$;

Тогда: $\Delta t = \dfrac{2\alpha}{\omega \cos\delta \cos\varphi}$; $\varphi \approx \varepsilon \approx 30^\circ$, т.е. $\cos\varphi\cos\varepsilon$

$\approx \cos^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

Получаем численный результат:

$$\Delta t \approx \frac{2 \cdot 1{,}22^\circ}{15^\circ/ч \cdot \frac{3}{4}} = \frac{9{,}76^\circ}{45^\circ/ч} \approx 12 \text{ минут};$$

Ответ: $\Delta t \approx 12$ минут;

КАЗ-19

№3

Оценим ~~кол-во~~ частоту появления новорождённых детей за 1 ~~минуту~~ секунду:

$$\dot{N} = \frac{160\cdot 10^6 \text{ дет}}{1 \text{ год}} \approx \frac{160\cdot 10^6 \text{ дет}}{\pi\cdot 10^7 \text{ с}} \approx 5 \, \frac{\text{дет}}{\text{с}}$$

Оценим время характерного полного солнечного затмения:


$$t = \frac{\rho_☾ + \rho_\odot}{\omega\cos\delta_\odot - \omega_☾},$$

где $\rho_\odot = 0.^\circ 5$ – угловой размер Солнца, и $\rho_☾ = 0.^\circ 5$ – угловой размер Луны, $\omega = \frac{2\pi}{T_s} \approx 15^\circ/ч$ – угловая скорость точки на небесного экватора, $T_s = 23^h 56^m 04^s$, $\delta_\odot$ – склонение Солнца, а $\omega_☾$ – угловая скорость Луны; т.к. $\omega_☾ \ll \omega\cos\delta_\odot \Rightarrow t \approx \frac{\rho_☾ + \rho_\odot}{\omega\cos\delta_\odot}$,

причём максимум $t$ будет достигаться, при максимуме $|\delta_\odot| \Rightarrow \delta_\odot = \pm\varepsilon$; а минимум $t$ при соот. $\delta_\odot = 0$;

Тогда: $t_{max} = \frac{\rho_☾ + \rho_\odot}{\omega\cos\varepsilon} = \frac{1^\circ}{15^\circ/ч \cos 23,^\circ 5} \approx 5$ мин

$t_{min} = \frac{\rho_☾ + \rho_\odot}{\omega} \approx 4$ мин

Тогда соответственное кол-во проклятых детей:

$$N_{max} = \vartheta \cdot t_{max} = 5 \frac{дет}{с} \cdot 5 мин = 1500 детей$$

$$N_{ср.} = \vartheta \cdot t_{min} = 5 \frac{дет}{с} \cdot 4 мин = 1200 детей$$

Ответ: От 1200 до 1500 детей могли бы попасть под действие аналогичного проклятия;