Задача 1

1. Т.к. длина экватора планеты равна 60000 км,

экватор-окружность

$$r_{\text{пл.}} = \frac{\overset{\text{длина экватора}}{l}}{2\pi} = \frac{60000\,\text{км}}{2\pi} = \frac{30000\,\text{км}}{\pi} \approx 10^4\,\text{км}$$

радиус

2. Т.к. сила тяжести на полюсе планеты равна силе тяжести на полюсе Земли (и т.к. на полюсе центростремительное ускорение вращения исчезает)

$$F_{T_{\text{пл.}}} = F_{T\oplus};\quad \frac{G m \overset{\text{масса планеты}}{M_{\text{пл.}}}}{R_{\text{пл}}^2} = \frac{G m \overset{\text{масса Земли}}{M_\oplus}}{\underset{\text{радиус Земли}}{R_\oplus^2}}$$ (считаем планету шаром)

тогда $$M_{\text{пл.}} = \left(\frac{R_{\text{пл}}}{R_\oplus}\right)^2 M_\oplus = \left(\frac{10^4}{6{,}4\cdot10^3}\right)^2 6\cdot10^{24}\,\text{кг} \approx 1{,}4\cdot10^{25}\,\text{кг}$$

3. Период обращения Луны вокруг Земли – сидерический месяц – равен примерно 27,3 сут.

По третьему закону Кеплера (считаем, что сумма масс планеты и спутника примерно равна массе планеты, для системы Земля-Луна это примерно так: $\frac{M_\oplus + M_☾}{M_\oplus} \approx \frac{82}{81} \approx 1$)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{a^3}{M_{\text{пл.}}}$$ ← берём большую полуось, а не радиус, т.к. и у Луны орбита вытянутая ($e \approx \frac{1}{18}$)

Запишем отношение формул для Луны и спутника

$$\cancel{a^3 = \frac{M_{\text{пл.}} T_☾^2 G}{4\pi^2} \approx \frac{1{,}4\cdot10^{25}\cdot(27{,}3\cdot24\cdot3600)^2\cdot6{,}7\cdot10^{-11}}{4\cdot10}\,\text{м}^3 \approx}$$

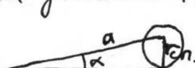
$$1 = \frac{a_{\text{сп.}}^3}{a_☾^3}\cdot\frac{M_\oplus}{M_{\text{пл.}}}$$

$$\cancel{\approx \frac{1{,}4\cdot10^{25}\cdot737\cdot576\cdot216\cdot6\cdot10^4\cdot\frac{20}{3}\cdot10^{-11}}{4\cdot10}\,\text{м}^3 \approx 1{,}35\cdot10^{26}\,\text{м}^3 = 135\cdot10^{24}\,\text{м}^3,\quad a = 10^8\sqrt[3]{135}\,\text{м} \approx 5{,}1\cdot10^8\,\text{м} = 5{,}1\cdot10^5\,\text{км}}$$

$$a_{\text{сп.}} = a_☾\sqrt[3]{\frac{M_{\text{пл.}}}{M_\oplus}} = a_☾\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{R_{\text{пл}}}{R_\oplus}\right)^2} = a_☾\sqrt[3]{\left(\frac{10^4}{6{,}4\cdot10^3}\right)^2} = a_☾\sqrt[3]{\frac{10^2}{6{,}4^2}} = a_☾\sqrt[3]{\frac{100^2}{64^2}} = \cancel{\frac{10\sqrt[3]{10}}{4^2}} =$$

$$\approx \frac{21{,}5}{16}\cdot3{,}8\cdot10^5\,\text{км} \approx \frac{5}{4}3{,}8\cdot10^5\,\text{км} = 4{,}6\cdot10^5\,\text{км}$$

4. Средний угловой размер Луны (для $\vec{r} = a$) составляет около $15' = \frac{1}{4}°$, тогда угловой размер α равен:

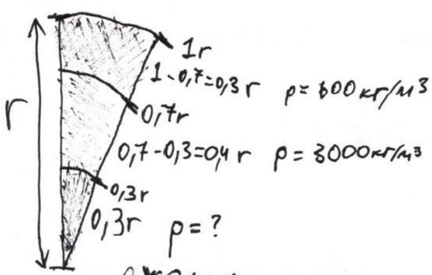


$\sin\alpha = \frac{r_{\text{сп.}}}{a}$, т.к. α очень маленький, $\sin\alpha = \alpha(\text{рад}) = \frac{15'\cdot60''/'}{2\cdot10^5\,''/\text{рад}} = \frac{900}{2\cdot10^5} = 4{,}5\cdot10^{-3}$

Тогда $r_{\text{сп}} = a\alpha = 4{,}5\cdot10^{-3}\cdot4{,}6\cdot10^5 \approx 20{,}7\cdot10^2 = 2070\,\text{км}$

Ответ: необходима малая планета радиусом 2070 км на расстоянии $4{,}6\cdot10^5\,\text{км} \approx \frac{5}{4}a_☾$.

Нсб-04 Задача 2



схема

1. Пусть радиус планеты r.
Тогда объём всей планеты $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
(планету примем шаром)

2. Объём ядра
$V_я = \frac{4}{3}\pi r_я^3 = (0{,}3r)^3 \frac{4}{3}\pi = 0{,}027V$

3. Объём средней части
$V_{ср} = V_{0,7} - V_я = (0{,}7r)^3 \frac{4}{3}\pi - 0{,}027V = (0{,}343 - 0{,}027)V = 0{,}316V$

4. Объём внешнего слоя
$V_{вн} = V - V_{ср} = V - 0{,}343V = 0{,}657V$

5. $M_{пл.} = m_{ядр} + m_{ср\,сл.} + m_{вн.} = \rho_я V_я + \rho_{ср.} V_{ср.} + \rho_{вн} V_{вн.}$

6. Тогда $\rho_я = \frac{M_{пл} - \rho_{ср}V_{ср} - \rho_{вн}V_{вн}}{V_я} = \frac{\rho_{пл}V - \rho_{ср}\cdot 0{,}316V - \rho_{вн}\cdot 0{,}657V}{0{,}027V} =$

$= \frac{1530 - 0{,}316\cdot 3000 - 0{,}657\cdot 600}{0{,}027}\frac{кг}{м^3} = \frac{1530 - 548 - 394{,}2}{0{,}027}\frac{кг}{м^3} = \frac{587{,}8\cdot 10^3}{27}\frac{кг}{м^3} =$

$\approx 21{,}7\cdot 10^3 \frac{кг}{м^3} = 21700\ кг/м^3$

Ответ: плотность ядра равна $21700\frac{кг}{м^3} \approx 2{,}2\cdot 10^4 \frac{кг}{м^3}$

Нсб-0,4 Задача 3 - начало

1. За год на Земле рождается 160 миллионов детей. Значит, если считать рождение детей разного пола равновероятным, рождается $\frac{160\cdot 10^6}{2} = 80\cdot 10^6$ девочек

2. 1 год - здесь можно считать 365,25 дня, т.к. приводится демографич. статистика, а она рассчитывается по календарным дням. Тогда в день рождается:

$$\frac{80\cdot 10^6}{365{,}25} \approx 2{,}2\cdot 10^4 \text{ девушек}$$

3. Я помню, что максимальная длительность полной фазы затмения - $7\frac{3}{4}$ мин, рассчёт есть в книге известного советского астронома А.А. Михайлова (А.А. Михайлов, „Теория затмений", 1954 г.). Однако, составители скорее всего имели ввиду, что это нужно рассчитать. Максимальная длительность будет, когда луна будет в перигее, а земля - в афелии, т.к. будет наименьшей разность скоростей, угловой размер Луны будет наибольшим, а угловой размер Солнца - наименьшим. Тогда пусть большие полуоси a, эксцентриситеты e. (☉ - солнце, ⊕ - Земля, ☾ - луна)

$\omega_☾ = \frac{V_{п☾}}{q_☾} = \frac{\sqrt{\frac{GM_⊕}{a_☾}\left(\frac{1+e_☾}{1-e_☾}\right)}}{a_☾(1-e_☾)}$; $\cancel{\omega_☉ = \frac{V_{a⊕}}{Q_⊕} = \frac{\sqrt{\frac{GM_☉}{a_⊕}\left(\frac{1-e_⊕}{1+e_⊕}\right)}}{a_⊕(1+e_⊕)}; \ \omega = \omega_☾ + \omega_☉}$

$\omega = \omega_☾$, т.к. солнце на небе за время затмения не меняет R_A и δ

Поэтому т.к. $\alpha_☾ = \frac{r_☾}{a_☾(1-e_☾)}$, $\alpha_☉ = \frac{r_☉}{a_⊕(1+e_⊕)}$, $t = \frac{\alpha_☾ - \alpha_☉}{\omega_☾} \approx 7\frac{3}{4}$ мин.

см. сл. страницу

Задача 3 - конец

4. За минуту рождается:

$$\frac{2,2\cdot 10^4}{24\cdot 60} = \frac{80\cdot 10^6}{365,25\cdot 24\cdot 60} = \frac{2\cdot 10^6}{13239} \approx 150 \text{ девушек}$$

5. $7\frac{3}{4}$ минуты - это $\frac{31}{4}$ минуты, т.е. за это время родятся

$$\frac{2\cdot 10^6}{13239}\cdot\frac{31}{4} = \frac{4681}{4} \approx 1170 \text{ девушек}$$

6. Максимальное число людей, которое могло бы попасть под проклятие - равно удвоенному найденному нами числу (наше - максимальное среднее число)

таким образом

$$2\cdot 1170 = 2340 \text{ человек}$$

Ответ: максимально возможное число людей, попавших под проклятие — 2340.

Задача 4

1. Для ~~некоторого~~ любого одинакового значения момента времени отношение радиусов будет равно отношению их пропорциональностей:

(пусть 1 более мощная, т.е. её энергия в 32 раза больше E_2)

$$\frac{R_1(t)}{R_2(t)} = \frac{E_1^{1/5}}{E_2^{1/5}}\cdot\frac{t^{2/5}}{t^{2/5}} = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{32}{1}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

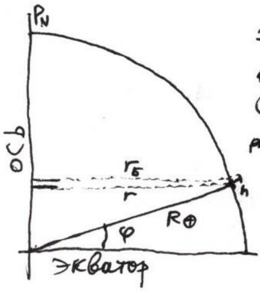
2. Значит в любой момент времени радиусы фронтов относятся как 2 : 1. Значит, если

$R_1 = 2R_2$ и $R_1 + R_2 = 300$пк, $R_1 = 200$пк, т.е. фронты встретятся на расстоянии 200пк от более мощной сверхновой.

Ответ: 200 пк.

Примечание: в условиях космоса трудно понять, что значит одновременно. Например, если бы мы находились у окрестностей одной из звёзд и в момент взрыва увидели бы, что другая звезда тоже взорвалась, для нас эти события были бы одновременны, но на самом деле вторая звезда взорвалась 972 года назад, ($D = 300$пк $= 3,26\cdot 300$ св.г. $= 972$ св.г.) т.е. за это время фронт мог пройти некоторое расстояние. Из-за этого ответ может поменяться, если знать точную формулу зависимости.

Задача 5



1. Из-за высоты башни её широтный круг немного ~~удлиняется~~ : $(\cos\varphi \approx 0{,}9)$

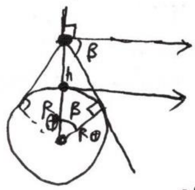
$$r = R_\oplus \cos\varphi$$

рис. 1.

$$r_Б = (R_\oplus + h)\cos\varphi$$

эффект слишком мал, т.к. $\frac{h}{R} \approx \frac{1}{10^5}$

2. Из-за поднятия горизонт опускается (рис. 2):



$$\sin\beta = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R+h} = \frac{\sqrt{R^2 - R^2 + 2Rh + h^2}}{R+h} = \frac{\sqrt{2Rh + h^2}}{R+h} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2Rh}{R^2} + \underbrace{\frac{h^2}{R^2}}_{\text{величина очень малая}}}}{1 + h/R} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}} \cdot \Big(1 + \underbrace{\frac{h}{R}}_{\text{величина малая}}\Big)^{-1} \approx \left(1 - \frac{h}{R}\right) \cdot \sqrt{\frac{2h}{R}} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

т.к. $h/R \approx \frac{1}{10^5}$

$\beta_{рад} \approx \sin\beta$, т.к. $\angle\beta$ мал

$$\beta^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi}\beta_{рад};\quad \beta^\circ = \frac{360}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 442}{6378 \cdot 10^3}} = \frac{180}{\pi} \cdot 10^{-3}\sqrt{1{,}386} \approx 90 \cdot 0{,}37 \cdot 10^{-3} = 3{,}33 \cdot 10^{-2\,\circ} =$$

$$= \frac{10}{3} \cdot 10^{-2\,\circ} = \frac{1}{30}^\circ;\quad \beta' = 60\beta^\circ = 2'$$

3. При вращении Земли (ок. $\frac{360^\circ}{24\text{ час}} = 15^\circ/\text{час}$), тогда т.к. $1' = 1/60^\circ$ и $1\text{ мин} = \frac{1}{60}$ ч, на 15' Земля поворачивается за 1 минуту, т.е. разница между днём на земной поверхности и в башне составит

$$\Delta = 2 \cdot \beta' \cdot \frac{1\text{ мин}}{15'} = \frac{4}{15}\text{ мин} = \frac{4 \cdot 60}{15}\text{ секунды} = 16\text{ секунд}$$

на восход и закат

Ответ: разница составит 16 секунд.