08 Сте-08

# XXIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

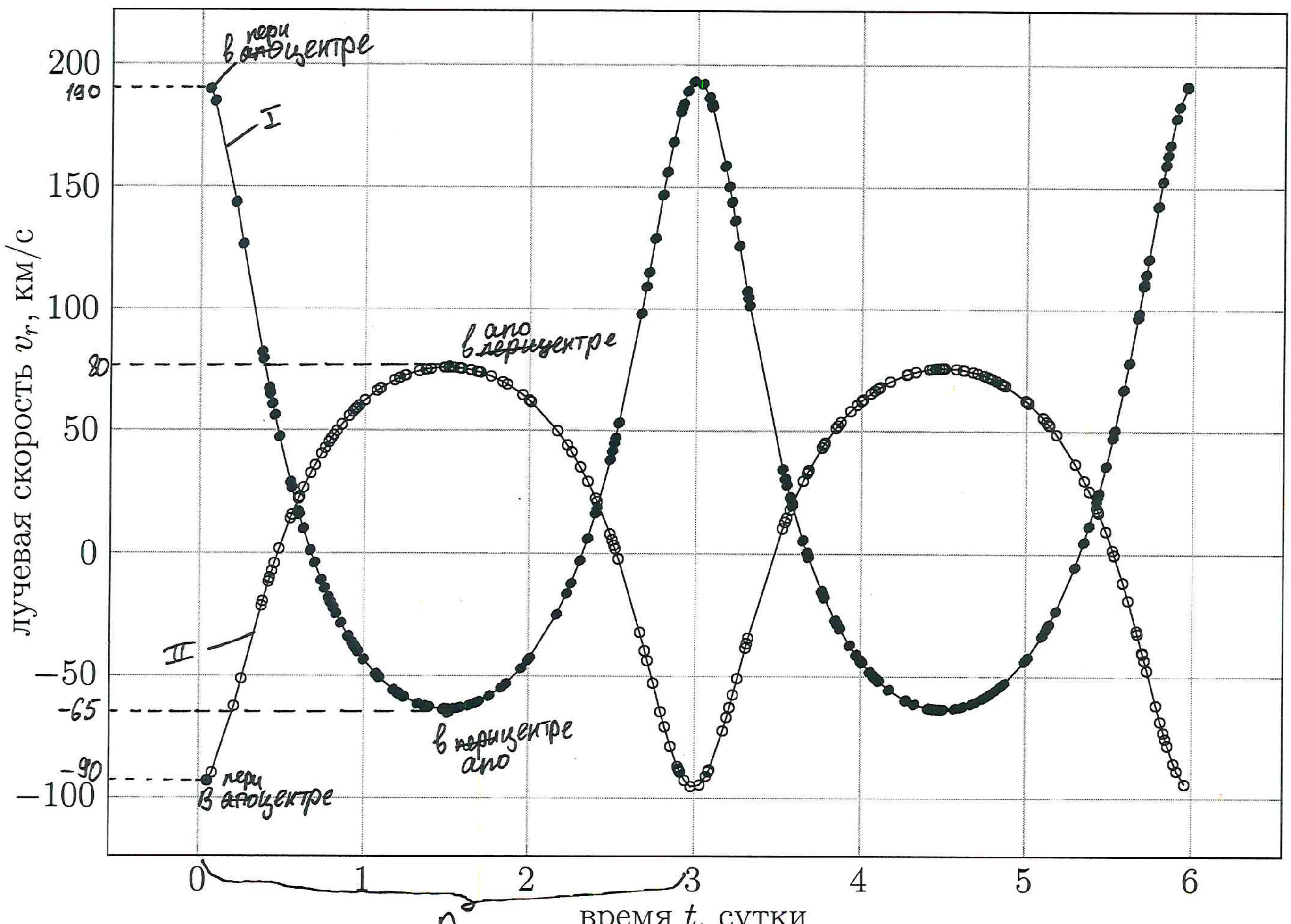
**практический тур**

**2022**

**13 марта**

## *11 класс*

Вам дана кривая лучевых скоростей двойной системы, состоящей из двух звезд Главной последовательности. Луч зрения лежит в плоскости орбиты, линия апсид (соединяющая периастры и апоастры орбит) перпендикулярна лучу зрения. Найдите параметры системы: массы звезд, период и большую полуось системы, эксцентриситет орбиты. Определите видимые звездные величины системы в максимуме и минимумах блеска. Годичный параллакс системы равен $\pi = 0''.05$, звезды считайте сферически симметричными, эффектами прогрева и потемнения диска к краю можно пренебречь.



Решение:

На графике обозначили места, где находилась звезда относительно ~~в~~ фокуса системы, когда имела некоторую скорость. Обозначим также, ~~а~~ какую звезду считаю ~~на~~ первой, а какую второй.

Рассмотрим масштаб графика: 17 мм соответствует 50 км/с

Тогда посчитаем скорости звезд в апоастре и периастре:

$50 \cdot 14 = 700$

$700 : 17 = 41\ldots$

$250 : 17 = 14\ldots$

$450 : 17 = 26$

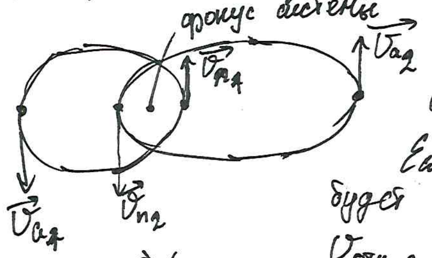
$v_{п1} \approx 150 + 40 \approx 190$ км/с

$v_{a1} \approx -50 - 15 \approx -65$ км/с

$v_{п2} \approx -100 + 8 = -92 \approx -90$ км/с

$v_{a2} \approx 50 + 26 \approx 80$ км/с

Когда лучевая скорость отрицательна, звезда отдаляется от нас, а когда - положительна, звезда приближается к нам. Это значит, что II звезда в апоастре отдаляется от нас, а ~~вторая~~ первая в апоастре приближается. Ну а с периастром наоборот. Тогда нарисуем примерную картину:




Значит обе звезды ~~идут~~ движутся против часовой стрелки.

Если одну звезду сделать неподвижной, то вторая будет двигаться с относительными скоростями $v_{отн\,п} = 190 + 90 = 280$ км/с

$v_{отн\,a} = 80 + 65 = 145 \approx 140$ км/с

$$v_a = v_0\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ ;\ v_п = v_0\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$\frac{v_п}{v_a} = \frac{1+e}{1-e}\ ;\ \text{тогда}\ \frac{v_{п\,отн}}{v_{a\,отн}} = \frac{1+e}{1-e},$$ где $e$ - эксцентриситет системы

$$\frac{1+e}{1-e} \approx 2 \Rightarrow 2 - 2e = 1 + e \Rightarrow e = \frac{1}{3}$$

Из графика видим, что между двумя одинаковыми скоростями проходит 3 суток, это и будет период системы. $P = 3$ сут.

Для I звезды: $\frac{190}{65} = \frac{1+e_1}{1-e_1} \Rightarrow \frac{190}{70} \approx \frac{1+e_1}{1-e_1} \Rightarrow 19 - 19e_1 = 7 + 7e_1 \Rightarrow 12 = 26e_1 \Rightarrow e_1 \approx 0{,}5$

$v_{п1} = v_{01}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \Rightarrow v_{п1} = v_{01}\sqrt{\frac{1{,}5}{0{,}5}} = v_{01}\sqrt{\frac{15}{5}} = v_{01}\sqrt{3} \Rightarrow v_{01} = \frac{v_{п1}}{\sqrt{3}} = \frac{190}{\sqrt{3}} \approx 111$ км/с

$1900 : 17 = 111$

$L$ - длина эллипса; $L = v_{0}P$; $L_1 = v_{01}P = L_1 = 111 \cdot 3 \cdot 24 \cdot 3600$ км

$L = \pi(a+b)$; $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow a^2e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2(1-e^2)}$

$L = \pi(a + a\sqrt{1-e^2}) = \pi a(1 + \sqrt{1-e^2}) \Rightarrow a_1 = \frac{L_1}{\pi(1+\sqrt{1-e^2})} \Rightarrow a_1 \approx \frac{111 \cdot 3 \cdot 24 \cdot 3600}{3(1+\sqrt{0{,}75})} =$

$= \frac{111 \cdot 24 \cdot 3600}{1 + \sqrt{0{,}75}}$; $\sqrt{0{,}75} \approx 0{,}85$; $85 \times 85 = 7225$; $a_1 \approx \frac{111 \cdot 24 \cdot 3600}{1{,}85} \approx 5184000 \approx 5{,}2$ млн км

$111 \times 24 = 2664$; $2664 \times 3600 = 9590400$

$959040000 : 185 = 5184000$

Продолжение на сл. стр.

Сте- 08

Аналогично поступаем со 2 звездой:

$$\frac{90}{80} = \frac{1+e_2}{1-e_2} \Rightarrow 9-9e_2 = 8+8e_2 \Rightarrow e_2 = \frac{1}{17}$$

$$v_{п2} = v_{02}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = v_{02}\sqrt{\frac{18}{16}} = v_{02}\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt2}v_{02} \Rightarrow v_{02} = \frac{v_{п2}\cdot 2\sqrt2}{3} = \frac{90\cdot2\sqrt2}{3} =$$
$$\approx 60\cdot1{,}4 \approx 84\ км/с$$

$$L_2 = 84\cdot3\cdot24\cdot3600\ (км);\ a_2 = \frac{L_2}{\pi(1+\sqrt{1-e_2^2})} = \frac{84\cdot3\cdot24\cdot3600}{3(1+\sqrt{\frac{288}{289}})}$$

т.к. $\sqrt{\frac{288}{289}} \approx 1$; $a_2 = \frac{84\cdot24\cdot3600}{2} = 84\cdot24\cdot1800 = 3628800\ км \approx 3{,}6$ млн км

$a = a_1 + a_2 = 3{,}6$ млн $+ 5{,}2$ млн $= 8{,}8$ млн км - большая полуось системы

~~$a = 8{,}8$ млн км $8{,}8\cdot10^6$ км~~ $\underline{a = 8{,}8\cdot10^6\ км}$

Запишем III з-н Кеплера (в уточненной форме), систему звёзд сравним с системой солнце-земля, массой земли пренебрегаем.

$$\frac{P^2(M_1+M_2)}{T^2\cdot M_\odot} = \frac{a^3}{a_\oplus^3}$$

Для облегчения вычисления $T \approx 360$ сут.

$$\frac{9\cdot(M_1+M_2)}{\cancel{120}\ 360^2\cdot2\cdot10^{30}} = \left(\frac{8}{150}\right)^3$$

$$M_1+M_2 = \frac{360^2\cdot2\cdot10^{30}\cdot8^3}{9\cdot150^3} = \frac{120^2\cdot2\cdot10^{30}\cdot8^3}{150^3} = \frac{120^2\cdot2^{10}\cdot10^{30}}{150^3} = \frac{120^2\cdot1024\cdot10^{30}}{150^3} =$$
$$= \frac{14400\cdot1024\cdot10^{30}}{150^3} \approx 4{,}4\cdot10^{30}\ кг$$

$M_1 = 4{,}4\cdot10^{30} - M_2$

$M_1a_1 = M_2a_2$ - соотношение системы

$4{,}4\cdot10^{30}a_1 = M_2(a_1+a_2)$

$4{,}4\cdot10^{30}\cdot5{,}2 = M_2\cdot8{,}8 \Rightarrow M_2 = \frac{4{,}4\cdot10^{30}\cdot5{,}2}{8{,}8} = \frac{5{,}2\cdot10^{30}}{2} = 2{,}6\cdot10^{30}$ кг.

$M_1 = (4{,}4-2{,}6)\cdot10^{30} = 1{,}8\cdot10^{30}$ кг

$\underline{M_1 = 1{,}8\cdot10^{30}\ кг}$ ; $\underline{M_2 = 2{,}6\cdot10^{30}\ кг}$

Так как звезды главной последовательности, то справедливо, что $\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4$, тогда:

$$\frac{L_1}{L_\odot} = \left(\frac{1{,}8}{2}\right)^4 = 0{,}9^4 = 0{,}6561$$

$$\frac{L_2}{L_\odot} = \left(\frac{2{,}6}{2}\right)^4 = 1{,}3^4 = 2{,}8561$$

Тогда в минимуме блеска (по ф-ле Погсона):

$\frac{|L_1-L_2|}{L_\odot} = 2{,}512^{M'_\odot - M'_{min}}$, где $M'_\odot$ и $M'_{min}$ - абсолютные зв. величины.

$\frac{2{,}2L_\odot}{L_\odot} = 2{,}512^{M'_\odot - M'_{min}} \Rightarrow 2{,}2 = 2{,}512^{M'_\odot - M'_{min}}$ ; $M'_\odot \approx 5^m$

$\lg 2{,}2 = 0{,}4(5^m - M_{min}) = 2 - 0{,}4M_{min} \Rightarrow M_{min} = (2-\lg2{,}2)^m\cdot\frac{1}{0{,}4}$

$M = m - 5 + 5\lg r$, где $r = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0{,}05''} = 20$ пк

$M'_{min} = m_{min} - 5 + 5\lg 20 = m_{min} - 5 + 5\lg 10 + 5\lg 2 = m_{min} + 5\lg 2$

$\frac{1}{0{,}4}(2 - \lg 2{,}2) = m_{min} + 5\lg 2$ ; $\lg 2 \approx \lg 2{,}2$ ; $\lg 2 \approx 0{,}3$

$m_{min} = \cancel{6\lg 2 + 2 = 2 - 6\lg 2}\ 5 - 2{,}5\lg 2{,}2 - 5\lg 2 = 5 - 7{,}5\lg 2$

$m_{min} = \cancel{2 - 6 \cdot 0{,}3 = 2 - 1{,}8}\ 5 - 7{,}5 \cdot 0{,}3 = 5 - 2{,}25 = \underline{2{,}75^m}$

$\begin{array}{r} 7{,}5 \\ 0{,}3 \\ \hline 2{,}25 \end{array}$

А в максимуме блеска (по ф-ле Погсона):

$\frac{L_1 + L_2}{L_\odot} = 2{,}512^{M'_\odot + M'_{max}} \approx 3{,}5$

$\begin{array}{r} + \ 0{,}6561 \\ 2{,}8561 \\ \hline 3{,}5122 \end{array}$

$2{,}512^{5^m - M'_{max}} \approx 3{,}5$

$0{,}4(5^m - M'_{max}) \approx \lg 3{,}5$ ; $\lg 3{,}5 > \lg 2{,}512$

$2 - 0{,}4 M'_{max} \approx 0{,}5$ $\lg 3{,}5 > 0{,}4$

$1{,}5 \approx 0{,}4 M'_{max}$ $\lg 3{,}5 \approx 0{,}5$

$M'_{max} \approx \frac{15}{4}{}^m$

$M'_{max} \approx 3{,}75^m$

$15 : 4 = 3{,}75$

$M'_{max} = m_{max} - 5 + 5\lg 20 = m_{max} + 5\lg 2$

$3{,}75^m = m_{max} + 5 \cdot 0{,}3$

$2{,}25^m = m_{max}$

$m_{max} = \underline{2{,}25^m}$

Ответ:
1) $e = \frac{1}{3}$
2) $P = 3$ сут.
3) $a = 8{,}8$ млн км
4) $M_1 = 1{,}8 \cdot 10^{30}$ кг ; $M_2 = 2{,}6 \cdot 10^{30}$ кг
5) $m_{min} = 2{,}75^m$
6) $m_{max} = 2{,}25^m$