№1.

Ускорение g на поверхности планет одинаково.

Длина экватора равна $L_э = 2\pi R \Rightarrow \frac{R_п}{R_\oplus} = \frac{60000}{40000} = 1,5$

($R_п$ - радиус планеты; $R_\oplus$ - радиус Земли.)

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = \frac{GM_п}{R_п^2}$$ (где $M_п$ - масса планеты.)

$$M_п = M_\oplus \cdot \frac{R_п^2}{R_\oplus^2} = M_\oplus \cdot 1,5^2 \cdot \frac{R_\oplus^2}{R_\oplus^2} = 2,25 M_\oplus$$

Далее воспользуемся уточнённым законом Кеплера:

$$\frac{T_{сп}^2 \cdot 2,25 M_\oplus}{T_☽^2 \cdot M_\oplus} = \frac{a_{сп}^3}{a_☽^3}$$ По условию $T_{сп} = T_☽$ (т.к. $T_{сп}$ - период нового спутника планеты) $\Rightarrow 2,25 a_☽^3 = a_{сп}^3$ ($a_{сп}$ - расстояние от центра планеты до нового спутника.)

$$a_{сп} = \sqrt[3]{a_☽^3 \cdot 2,25} = a_☽ \cdot \sqrt[3]{2,25} \approx 1,3 a_☽ \approx 1,3 \cdot 384000 \approx 499200 км$$

384000
1,3
152000
34
99200,0

$a_{сп} \approx 500000$ км.

Угловой размер нового спутника такой же, как у Луны с Земли:

$$\alpha = \frac{R_☽}{a_☽} = \frac{R_{сп}}{a_{сп}} \Rightarrow R_{сп} = R_☽ \cdot \frac{a_{сп}}{a_☽} = 1,3 R_☽ = 1,3 \cdot 1740 = 2262 км.$$

740
1,3
220
4
62,0

$R_{сп} \approx 2260$ км. $D_{сп} \approx 2 \cdot 2260 \approx 4520$ км - диаметр.

Ответ: $R_{сп} \approx 2260$ км - радиус спутника (малой планеты)

$D_{сп} \approx 4520$ км - диаметр спутника.

$a_{сп} \approx 500000$ км - расстояние от центра планеты до спутника.

N2.

Допустим, искомая плотность равна ρ_1; радиус планеты R.

Средняя плотность равна отношению всей массы ко всему объёму.

$$1530 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot 0{,}3^3 \cdot \rho_1 + \frac{4}{3}\pi R^3 (0{,}7^3 - 0{,}3^3)\cdot 3000 + \frac{4}{3}\pi R^3 (1 - 0{,}7^3)\cdot 600}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

($\frac{4}{3}\pi R^3$ - объём шара; $m = \rho V$ - масса.)

$$1530 = \frac{0{,}3^3 \rho_1 + (0{,}7^3 - 0{,}3^3)\cdot 3000 + (1 - 0{,}7^3)\cdot 600}{1}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}343 \\ -\,0{,}027 \\ \hline 0{,}316 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}000 \\ -\,0{,}343 \\ \hline 0{,}657 \end{array}$$

$$0{,}027\rho_1 = 1530 - 0{,}316\cdot 3000 - 0{,}657\cdot 600$$

$$0{,}027\rho_1 = 1530 - 948 - 394{,}2 = 187{,}8$$

~~187,8 | 0,027~~

$$\begin{array}{r|l} 187800 & 27 \\ \cline{2-2} -162 & 6956 \\ \hline 258 & \\ -243 & \\ \hline 150 & \\ -135 & \\ \hline 150 & \end{array}$$

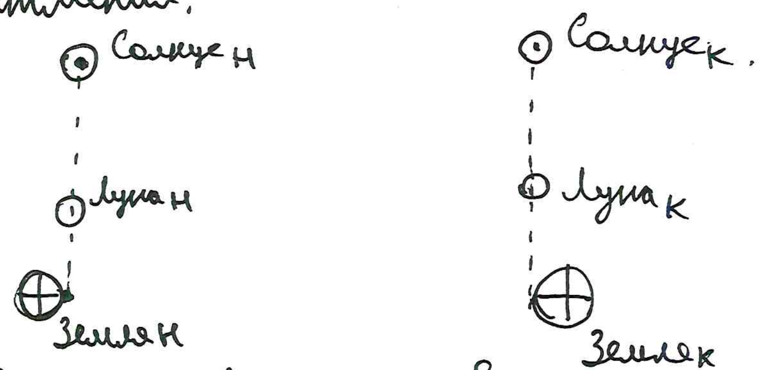
$$\rho_1 = \frac{187{,}8}{0{,}027} = 6956 \approx 7000 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: $\rho_1 \approx 7000$ кг/м^3 - плотность ядра планеты.

N3.

Допустим, затмение видно на экваторе.

Тогда, покажем на рисунке положения Луны, Земли и Солнца для начальной (буква н) и конечной (буква к) фаз затмения.

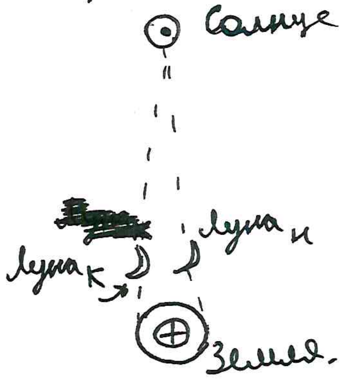


Скорость Луны на орбите Земли ≈ 1км/с; Скорость Земли относительно Солнца равна 30км/с.

Во время затмения Луна, Земля и Солнце находятся на одной прямой, поэтому Скорость Луны направлена в ту же сторону, что и скорость Земли и равна 30 - 1 = 29 км/с.

Перейдём в систему отсчёта Земля-Солнце.

Солнце находится на очень большом расстоянии от Земли и Луны и лучи от Солнца на Землю приходят практически параллельные. Поэтому Луна должна пройти расстояние, равное $2R_\oplus = 12800$ км со скоростью относительно Земли, равной 1 км/с.



Время от начальной фазы до конечной равно

$$T = \frac{2R_\oplus}{1\,км/с} = \frac{12800}{1} = 12800\,с = 213\,мин.$$

$$T \approx \frac{213}{60}\,ч \approx 3{,}5\,ч.$$

12800 | 60
120 | 213
80
-60
200
-180
20

160000000 | 24
144 | 6666666,67
160

Теперь посчитаем, сколько людей родилось за 1 ч:

$$\frac{160000000}{365\cdot 24} = \frac{2}{3\cdot 365}\cdot 10^7 = \frac{2}{1095}\cdot 10^7 \approx 2\cdot 10^{7-3} = 20000 \text{ детей.}$$

Максимум за 1 затмение может родится

$20000 \cdot 3{,}5 = 70000$ детей.

Ответ: 70000 детей — максимальное число детей, которые могут родиться за 1 затмение. (т.е. за 1 затмение под „проклятие" попадают ≤ 70000 человек.) (нижней границы нет, т.к. полное затмение может быть практически мгновенным и за время, пока оно происходит родится 0 человек.)

N4.

$$R \sim \sqrt[5]{E t^2}$$

$R_1 \sim \sqrt[5]{32 E t^2}$ — радиус более мощной сверхновой.

$R_2 \sim \sqrt[5]{E t^2}$ — радиус менее мощной сверхновой. (E — энергия взрыва менее мощной сверхновой.)

Вне зависимости от времени отношение радиусов R_1 и R_2 — константа.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt[5]{32 E t^2}}{\sqrt[5]{E t^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{E t^2}}{\sqrt[5]{E t^2}} = 2.$$

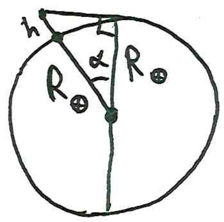
Т.к. фронты встретились, то $R_1+R_2=300$ пк.

$$\begin{cases} R_1+R_2=300\text{ пк}\\ \dfrac{R_1}{R_2}=2\end{cases} \Rightarrow R_2=0{,}5R_1 \Rightarrow 1{,}5R_1=300\text{ пк}.$$

$R_1=\frac{300}{1{,}5}=\frac{300\cdot 2}{3}=200$ пк – расстояние на котором встретились фронты. (от более мощной сверхновой.)

Ответ: $R_1=200$ пк – расстояние от более мощной сверхновой до места встречи фронтов.

№5.



Найдём угол понижения горизонта α:

$$\alpha=\arccos\frac{R_\oplus}{R_\oplus+h}=\arccos\frac{6400000}{6400442}$$

$\cos\alpha\approx0{,}99993$

$$\begin{array}{r} \times\ 0{,}99993\\ 0{,}99993\\ \hline +\ 299979\\ 899937\\ 899937\\ 899937\\ 899937\\ \hline 0{,}9998600049 \end{array}$$

$1-0{,}99986=0{,}00014$

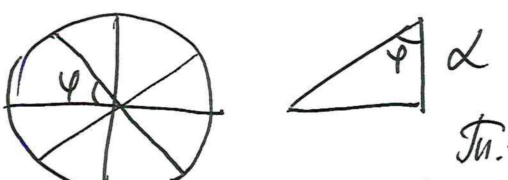
$$\begin{array}{r|l} 6400000{,}0 & 6400442\\ -5760397\,8 & 0{,}99993\\ \hline 63960220 & \\ -57603978 & \\ \hline 63562420 & \\ -57603978 & \\ \hline 59584420 & \\ -57603978 & \\ \hline 1980442 & \end{array}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{14\cdot10^{-5}}=\sqrt{1{,}4}\cdot\frac{1}{100}=\frac{1{,}2}{100}=0{,}012$$

Для малых углов $\sin x\approx x$

$\alpha\approx0{,}012$ рад $=0{,}012\cdot206265''=2475''\approx41'$

$\alpha\approx\frac{2}{3}^\circ$



Т.к. $\varphi\neq0$, то Солнце заходит за горизонт под углом $90-\varphi$.

Т.е. Солнце проходит путь, видимый только в ресторане, равный $2\cdot\frac{\alpha}{\cos\varphi}=\tau$

$\varphi\approx30^\circ\Rightarrow\cos\varphi\approx0{,}87$

$$\begin{array}{r|l} 0{,}6667 & 87\\ -609 & 0{,}076\\ \hline 577 & \\ -522 & \\ \hline 55 & \end{array}$$

$\tau=2\cdot0{,}77=1{,}54^\circ$

Солнце проходит 1° за 4 мин.

Дневной пост в ресторане длится дольше на ~6 мин.

Ответ: ≈ 6 мин – разница между длиной поста в ресторане и на уровне моря.