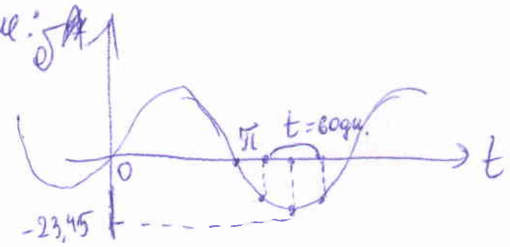
КАЗ-16

1 Задача.

Склонение солнца (по изменению) представляют собой гармонические колебания. $\delta_\odot = \varepsilon \cdot \sin\left(\frac{n}{365} \cdot 360\right) \simeq \varepsilon \cdot \sin(n)$ (1) Рассмотрим склонение солнца вблизи точки зимнего солнцестояния. В начале полярной ночи и в её конце солнце будет иметь одинаковое по модулю, ~~на~~ и знаку ~~разное по знаку~~ склонение:



Значит моменты начала полярной ночи и её окончания равноудалены от ~~точки~~ 22.12. (даты зимнего сс). Т.к. полярная ночь длится году, то ~~сначала~~ начинается она за 30 дней до зимнего сс. Определим склонение солнца тогда:

в формуле (1) n - это кол-во дней, прошедших с момента вес. р/д. Тогда: $\sin(360 - x) = -\sin(x)$. Используя эту формулу выразим кол-во дней ~~в мо~~ от момента начала полярной ночи до весеннего р/д:

от зимнего сс до вес р/д $\simeq 90$ дней $\Rightarrow n = 90 + 30$. $\sin(90+n) = \sin(n)$.

Тогда имеем:

$\delta_\odot = -\varepsilon \cdot \sin(n) \approx -0{,}5\,\varepsilon \approx -11{,}75^\circ$. Определим тогда широту села, учитывая рефракцию r: $(r = 35')$; $\delta_\odot = -11^\circ 45'$

$90 - \varphi + \delta + r = 0$ $(|\varphi - \delta| > 0$, значит формула $90 - \varphi + \delta)$.

$90 - 11^\circ 45' + 35' = \varphi$

$\varphi \simeq 79^\circ$ (точно $\varphi = 78^\circ 50'$). Тогда запишем ур-я ~~для~~ кульминаций для звезды:

$|\varphi - \delta|$ опять будет > 0, иначе ~~звезда б~~ разница высот кульминаций была бы ~~больше~~ меньше и не соотв-ла ус-ю.

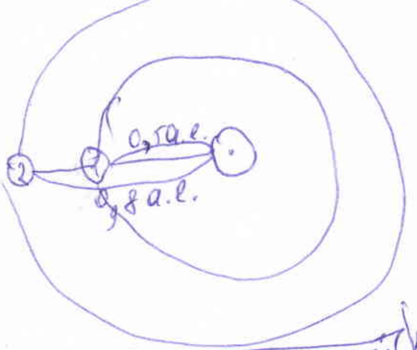
$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 90 - \varphi + \delta = 2h \\ 2)\ 90 - \delta + \varphi = h. \end{array}\right\} \Rightarrow 90 - \varphi + \delta = 180 - 2\delta + 2\varphi$$

$$3(90 - \varphi) = \delta \Rightarrow \delta \simeq 33^\circ.$$

Ответ: $\delta = 33^\circ$.

Задача 3.

КАЗ-16

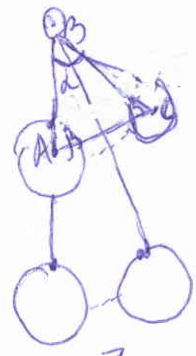


Попробуем объяснить ~~разницу в~~ рав-во местных „солнечных" суток на планетах с условием того, что орбитальный период внешней планеты больше внутренней. Угловая скорость внутренней планеты, ~~как и линейная~~ будет больше. Тогда 1 планета смещается на угол больший, нежели внешняя (проходит бо́льшую часть своей ~~планеты~~ орбиты). Отсюда следует такая зарисовка:

$V_1 = \sqrt{\frac{GM}{0{,}5\text{ а.е.}}} = \sqrt{\frac{8\cdot10^{30}\cdot6{,}67\cdot10^{-11}}{10^{11}\cdot1{,}5}} = \sqrt{10^8\cdot8\cdot4} = \sqrt{2}\cdot4\cdot10^4 = 56\text{ км/с}$

$V_2 = \sqrt{\frac{GM}{0{,}8\text{ а.е.}}} = \sqrt{\frac{4\cdot10^{30}\cdot6{,}67\cdot10^{-11}}{10^{11}\cdot1{,}5\cdot0{,}8}} \approx \sqrt{10^8\cdot6{,}67\cdot3} = 44\text{ км/с}.$

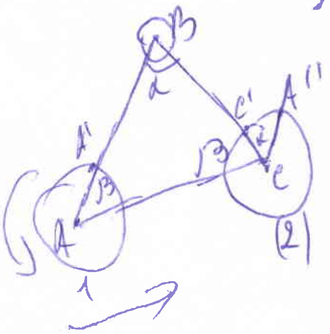
$V_1 > V_2.$



В треугольнике ABC AB=BC.
Угол $\alpha = 180 - 2\beta$

направл-е орбит. движ-я 1 планета.

Рассм-м подробнее вращ-е внутр. планеты:



На (2) изображ-и точка A'' – точка, где ~~в предыдущ. раз были~~ за солнечные сутки они начинались в предыдущ. раз; ⊕ спустя 1 t (t – солнечные сутки) они начнут не в точке A'', а в точке C'.
Из парал-ности AA'' и CA'' => $\angle C'CA'' = \alpha$.

Обращая внимание на осевой период вдвое больший у внутр. планеты чем у внешней, это значит, что осевое движ-е планеты сонапр-но с орбитальным (Это следует из того, что 1 планете нужно прокрутиться на угол $> 2\pi$ и из того, что её период больше, чем период второй (у которой свой α – доля прохода орбиты / сутки, меньше).
Вычислим по 3-му з-ну Кеплера в е.с. год-а.е.-$M_\odot$ периоды ω/сутки планет:

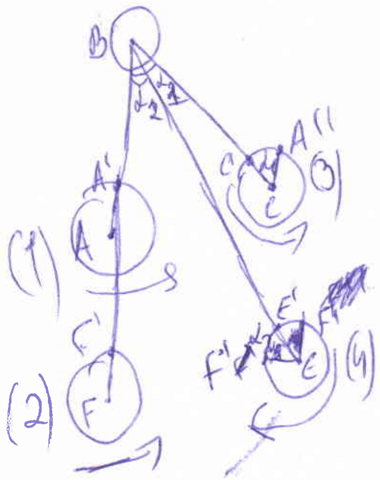
$$\left.\begin{aligned} &1)\ \frac{2}{1} = \frac{0{,}5^3}{T_1^2} \\ &2)\ \frac{2}{1} = \frac{0{,}8^3}{T_2^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \frac{a^{3/2}}{1{,}4} \Rightarrow T_1 = 0{,}1\text{ г.},\ T_2 = 0{,}32\text{ г.}$$

Угловая скорость $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Значит $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = 3{,}2$.

Учитывая тот факт, что $\omega_1 = 3{,}2\,\omega_2$ и что $t_1 = t_2$ (солнеч. сутки):

$\alpha_1 = 3{,}2\,\alpha_2$ — углы, на которые планеты смещ-ся за t_1 по своей орбите.



На (1), (2) — неусловное напр-е орбит. вр-я, на (3), (4) — направл-я осевого вращения (вызванные из (1, 2)).

$\Omega_1 = 2\,\Omega_2$ — угловые скорости осевого вр-я.

$\cancel{\Omega_1 \cdot t + \alpha_1 = \Omega_2 \cdot t + \alpha_2}$.

Зная, что направление осевого и орбит дв-я 1 планеты совп. и что сутки равны можно сделать вывод, что напр-е осевого вр-я второй (внешней планеты) противонапр-но. То есть за сутки первая планета делает более одного поворота, а вторая не доворачив. до полного.

$$\Omega_1 \cdot t - \alpha_1 = \Omega_2 \cdot t + \alpha_2 = 2\pi$$

$$2\,\Omega_2 \cdot t - \Omega_2 \cdot t = \alpha_2 + \alpha_1 = 4{,}2\,\alpha_2.$$

$$\Omega_2 \cdot t = 4{,}2\,\alpha_2, \text{ но } \Omega_2 \cdot t + \alpha_2 = 2\pi \Rightarrow 5{,}2\,\alpha_2 = 2\pi. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{2\pi}{5{,}2} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5{,}2} = \frac{6{,}28}{5{,}2} \approx 1{,}2^r \approx 60^\circ.$$

Зная, что $T_2 = 0{,}32\,г$ ~~за~~, а $\frac{360}{6} = 60^\circ \Rightarrow$ вторая планета проходит α_2 за $\frac{T_2}{6} \approx 0{,}05\,г$. Значит период первой планеты будет в 2 раза меньше $= 0{,}025\,г$.

Ответ: орбитальный период вн. планеты $= 0{,}05\,г$., внутр. $= 0{,}025\,г$.

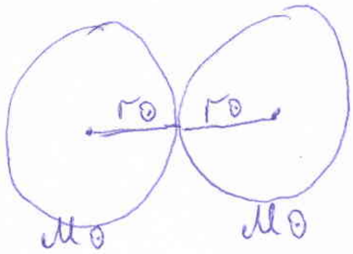
Задача 4.

Для звёзд главной посл-ти (W UMa включает в себя 2 звезды П) харна след. завис-ть: $R \sim M$. 1) Звёзды класса K имеют порядок массы (в среднем, не рассм-я крит. случаи, когда у звёзды крит. масса $\approx 0{,}08 M_\odot$ иначе есть шанс, что термояд. реакции не запустятся) $10^{-1} M_\odot$. Пусть тогда имеется переменная звезда 1 из компонентов спектрального класса K с $m_1 = 10^{-1} M_\odot$ ($r_1 = 10^{-1} r_\odot$)

2) Звёзды класса F в среднем могут иметь чуть большую массу, чем Солнце. Пусть переменная 2, из 2х компонентов класса F состоит из двух звёзд с массами $m_2 = 1{,}4 M_\odot$ ($r_2 = \cancel{10}\, 1{,}4\, r_\odot$).

3) Переменная из звёзд класса G с $m_3 = M_\odot$; $r_3 = r_\odot$.

Начнём с 3 переменной:



Расстояние между центрами звёзд, а именно диаметр одной звезды и будет большой полуосью для переменной. Запишем 3-й з-н ~~Ньютона~~ Кеплера:-) в системе СИ для 3 переменной:

$$\frac{G \cdot 2M_\odot}{4\pi^2} = \frac{a_\odot^3}{T_\odot^2}$$

$$\boxed{\begin{gathered} R_\odot = 7 \cdot 10^8 \text{ м} \\ \Downarrow \\ a_\odot = 2R_\odot = 1{,}4 \cdot 10^9 \text{ м} \end{gathered}}$$

$$T_\odot = \sqrt{\frac{a^3 4\pi^2}{G \cdot 2M_\odot}} = 2\pi \sqrt{\frac{1{,}4^3 \cdot 10^{27}}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{30}}} =$$

$$= \pi \cdot \sqrt{\frac{1{,}4^3}{6{,}67} \cdot 10^8} = \pi \cdot \sqrt{\frac{3{,}5}{6{,}67} \cdot 10^8} = \pi \cdot \frac{10^4}{\sqrt{2}} = 2{,}25 \cdot 10^4 = 2250 \text{ с}.$$

Выразим в часах:

$$2250 : 3600 = 0{,}625 \text{ часа} \approx 36 \text{ минут}.$$

```
 2250 |3600
    0 |0,625
 -----
-22500
 21600
 -----
  9000
 -7200
 -----
 18000
-18000
 -----
     0
```

Теперь рассмотрим переменную 2:

В ней $\frac{R}{R_\odot} = \frac{M}{M_\odot} = 1,4 = \Delta 2 \Rightarrow R = 1,4 R_\odot = \Delta 2 \cdot R_\odot \Rightarrow a = 2 \cdot \Delta 2 \cdot R_\odot = \Delta 2 \cdot a_\odot$

$M = 1,4 M_\odot = \Delta 2 \cdot M_\odot$

Выразим период через $\Delta 2$:

$$T_2 = \sqrt{\frac{a_2^3 \cdot 4\pi^2}{G \cdot 2M_\odot \cdot \Delta 2}} = \sqrt{\frac{\Delta 2^{3} \cdot a_\odot^3 \cdot 4\pi^2}{G \cdot 2M_\odot \cdot \Delta 2}} = \Delta 2 \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{a_\odot^3 \cdot 4\pi^2}{G \cdot 2M_\odot}}}_{T_\odot} =$$

$= 1,4 \cdot 2250 = 3150с = 52,5$ минуты.

Рассмотрим переменную 1:

В ней $\frac{R}{R_\odot} = \frac{M}{M_\odot} = 0,1 = \Delta 1 \Rightarrow$ $R = 0,1 R_\odot = \Delta 1 R_\odot \Rightarrow a = a_\odot \cdot \Delta 1$

$M = \Delta 1 M_\odot$

Период:

$T_3 = \Delta 1 \cdot T_\odot = 0,1 \cdot T_\odot = 225с \approx 4$ минуты.

Ответ: Характерный орбит. период W UMa для звезд типа Солнца $= 36$ мин., спектрального класса $F = 52,5$ минуты, спектрального класса $K \approx 4$ минуты.

КАЗ-16

Задача 2.

1) Будем считать ретрансляционный спутник геостационарным. Такие спутники, как известно, имеют период обращения = земному и высоту примерно $36\cdot10^3$ км. Тогда будем считать его точечным источником радиоизлучения, когда как угловой диаметр Солнца 32'. Если спутник вращ-ся в плоскости земного экватора, то спутник будет постоянно в небе пункта, где он виден / может быть в зените, почти на гор-те, т.е. как угодно.

В таком случае, если спутник в зените, то на экв-ре солнце оказ-ся в зените в дни вр.д и о.р.д. Тогда для оценки диапазона дат засветки на экв-ре будем считать, что склонение Солнца меняется равномерно (чтобы учесть случаи, когда ~~оно~~ спутник не только в зените). Для такого случая будем считать, что скорость смены склонения / день $= \frac{\varepsilon}{90} = \frac{23{,}45}{90} \approx ~~\frac{1}{4}~~ 0{,}26^\circ$.

$\simeq 0{,}26^\circ$/сут.

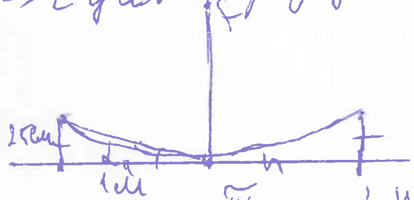
Считая спутник точечным, а угл. $\odot\ \Theta = 32'$:

$$t = \frac{32'}{0{,}26^\circ/\text{сут.}} \cong \frac{0{,}5^\circ}{0{,}26/\text{сут.}} \simeq 2 \text{ сут.}$$

2) Определим длину волны радиосиг-ла: $\nu\lambda = c \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 2{,}5$ см. Для корректного приёма в фокусе

Каноничное ур-е параболы: $y^2 = 2px$.

($F = \frac{p}{2}$) должно уместиться целое или полуцелое λ. Тогда пусть $F = 1$ м; $p = 2 \Rightarrow$ с учётом радиуса тарелки 1 м: $1 = 4x \Rightarrow x$ - высота $= 0{,}25$ м.



Тогда α на рис. $= \frac{25}{~~200~~} \cdot 57{,}3 \simeq ~~14^\circ~~$. Чтобы станция регистрировала хоть какое-то изл-е со спутника, то он должен быть на высоте 6°. Но в реальности какой-то адекватный сигнал можно принять при высоте $\simeq 30^\circ$ на диаметр подобной уст-ки. Всё также с предположением о геостац-ти спутника ответ может быть 2 сутки раз в полгода.

Ответ: 2 суток раз в полгода.

КАЗ-16

Для начала рассчитаем радиус Шварцшильда для нашей предполагаемой сверхмассивной ч.д.:

$c=\sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow \frac{2GM}{c^2}=r=\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4{,}5\cdot 10^{6}\cdot 2\cdot 10^{30}}{9\cdot 10^{16}}=$

$=13\cdot 10^9$ м. $M=4{,}5\cdot 10^6 M_\odot$

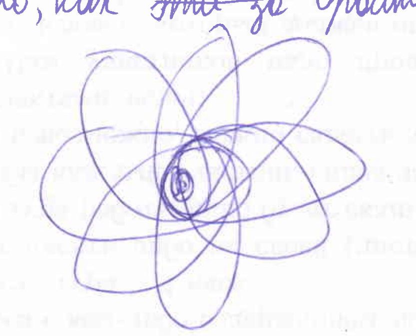
Порядок масс ~~звездных~~ черных дыр звездных масс: $n\cdot 10^1 M_\odot$. Пусть $n=2$ и масса каждой черной дыры $20 M_\odot$. Отсюда, если предполагается, что эти ч.д. заменят сверхмассивную в центре галактики, то всего ч.д.: $x=\frac{M}{20M_\odot}=\frac{4{,}5\cdot 10^6}{20}=\frac{4{,}5\cdot 10^5}{2}=2{,}25\cdot 10^5$ черных дыр.

Рассчитаем радиус Шварцшильда для каждой такой дыры:

$r=\frac{2GM}{c^2}=\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 2\cdot 10^{31}}{9\cdot 10^{16}}=6{,}67\cdot 10^4$ м.

Рассчитаем отношение захватываемого объема одной сверхмассивной дырой и $2{,}25\cdot 10^5$ маленькими:

$\frac{V_б}{xV_м}=\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot 13^3\cdot 10^{27}}{\frac{4}{3}\pi\cdot 6{,}5^3\cdot 10^{12}\cdot 2{,}25\cdot 10^5}=10^{10}\cdot\frac{13^3}{6{,}5^3\cdot 2{,}25}\Rightarrow$ значит, что захватываемый объем сверхмас. черной дырой много больше, чем x ч.д. зв. массы. ~~Но вообще~~ И это может свидетельствовать в пользу предположения. Но вспомним данные реальных набл-й вращ-я звезд в созвездии Стрельца (у центра галактики), где все звезды вокруг объекта вращ-ся по довольно вытян. ~~объектам~~ орбитам с довольно небольшими периодами, а также то, как ~~эти зв~~ орбиты этих звезд вращались:



Лист № 7

КАЗ-16

В скоплении все объекты не попадали бы друг в друга (док-во выше с учетом объёмов захвата), но удержаны общим гравполем; центр масс в центре скопления. ~~Если~~ Допустим, что скопление будет стабильно, в теории звёзды могут вращаться с тем же эффектом, опис. выше.

Но вспомним ещё про ~~излучение~~ ЭМ-излучение нашего объекта в центре галактики.

В случае аккреции какого-либо в-ва с какой-то стороны на скоп-е, ~~оно бы~~ излучение, созд. аккрецией попадалось бы очень сильно искажённым (излучение из ~~вскопления~~ скопления). ~~Это~~ (Осветы изл-я были бы очень ослабленные, а возможно и гравит-но преломлены (Эффект ОТО)). Это говорит о том, что предположение из усл-я ~~во~~ по моему мнению не верно.

Лист № 8