№3

Продолжительность солнечных суток на планетах совпадает, а продолжительность звёздных суток, т.е. полного оборота вокруг своей оси на 360° различаются: у внешней планеты этот период в два раза больше. По этим данным понятно, что направление вращения планет вокруг своих осей противоположны: у внешней планеты оно противоположно орбитальному движению, тем самым солнечные сутки становятся короче звёздных, а у внутренней - наоборот: ~~ор~~ направление орбитального движения совпадает с направлением осевого вращения и ~~тем с~~ таким образом после звёздных суток планете приходится „докручиваться" до исходного положения и, следовательно, солнечные сутки больше звёздных.

Определю по 3 закону Кеплера периоды обращения планет вокруг звезды. Т.к. масса звезды выражена в массах Солнца, то можно упростить формулу до такой:

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{w}}$$

, где T - период орбитального вращения, a - большая полуось орбиты (в данном случае - радиус, т.к. орбита круговая), w - отношение массы звезды к массе Солнца.

Тогда посчитаю T_1 для внутренней и T_2 для внешней планет:

№3 (продолжение)

$$T_1 = \sqrt{\frac{0{,}5^3}{2}} = \sqrt{\frac{0{,}125}{2}} = \sqrt{0{,}0625} = 0{,}25 \text{ года}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{0{,}8^3}{2}} = \sqrt{0{,}256} \approx 0{,}5 \text{ года}$$

Как видно, периоды отличаются в 2 раза. Теперь исходя из периода, определю угловые скорости орбитального движения планет:

$$\omega_1 = \frac{2\Pi}{0{,}25 \text{ года}} = 8\Pi \frac{\text{рад}}{\text{год}}$$

$$\omega_2 = \frac{2\Pi}{0{,}5 \text{ лет}} = 4\Pi \frac{\text{рад}}{\text{год}}$$

Пусть угловая скорость осевого вращения внешней планеты ω. Тогда у внутренней $= 2\omega$.

Отсюда логично равенство:

$$\frac{\omega}{t} + \frac{\omega_1}{t} = \frac{2\omega}{t} - \frac{\omega_2}{t}; \quad \omega + \omega_1 = 2\omega - \omega_2;$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 + \omega_2 \\ 2\omega = 2(\omega_1 + \omega_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = 12\Pi \frac{\text{рад}}{\text{год}} \\ 2\omega = 24\Pi \text{ рад/год} \end{cases}$$

Отсюда звёздный период внешней планеты равен $\frac{1}{6}$ земного года, а внутренней $\frac{1}{12}$ земного года.

Ответ: $t_{\text{внутренней}} = \frac{1}{12}$ земного года; $t_{\text{внешней}} = \frac{1}{6}$ земного года.

№1

Это Русское село => рассматривать надо только северное полушарие. В этот период 60 дней верхняя кульминация Солнца меньше или равна нулю. Минимальной верхней кульминации в течение года в северном полушарии Солнце достигает в день зимнего солнцестояния, т.е. 21 декабря. А в последние дни полярной ночи, т.е. 21 декабря ± 30 дней, т.е. в даты 20 января и 21 ноября верхняя кульминация Солнца в этом селе равна 0°.

Рассмотрю, например 20 января. Чтобы найти широту φ села, надо сначала вычислить склонение Солнца $\delta_\odot$ 20 января. Оно вычисляется по этой формуле:

$\delta_\odot = 23.5 \cdot \sin\left(\frac{N}{365} \cdot 360\right)$, где N - время, прошедшее с момента весеннего равноденствия 23 марта. С момента 23 марта до 20 января прошло примерно 300 дней. Подставлю это в формулу:

$$\delta_\odot = 23.5 \cdot \sin\left(\frac{300}{365} \cdot 360\right) = 23.5 \cdot \sin 300 =$$
$$= 23.5 \cdot \sin(-60°) = -23.5 \cdot \sin 60° =$$
$$= -23.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -20°$$

Теперь вычислю φ по формуле $h_{в.к}$:

$h_{в.к.} = 90° - |\varphi - \delta_\odot|$; $\cancel{h_{в}}$ $0° = 90° - |\varphi + 20°|$

$|\varphi + 20°| = 90° \to \varphi = 70°$

№1 (продолжение)

Итак, я посчитал широту местности. Она равна 70°. Про звезду известно, что она незаходящая, т.к. нижняя кульминация над горизонтом.

$$h_{в.к.} = 2h_{н.к}$$

Тогда по формулам: $h_{в.к.} = 90° - |70 - \delta|$

$h_{н.к.} = |70 + \delta| - 90$

$$90° - |70° - \delta| = 2(|70 + \delta| - 90)$$

$$90 - |70 - \delta| = |140 + 2\delta| - 180$$

$$270 = |70 - \delta| + |140 + 2\delta|$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 270 = 70 - \delta + 140 + 2\delta \\ 70 \geq \delta \end{cases} \\ \begin{cases} 270 = \delta - 70 + 140 + 2\delta \\ 70 \leq \delta \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \delta = 60 \\ 70 \geq \delta \end{cases} \\ \begin{cases} \delta = 66{,}6 \\ 70 \leq \delta \end{cases} \Rightarrow \varnothing \end{array}\right.$$

Тогда $\delta_* = 60°$. Ответ: $\delta_* = 60°$.

№4

Они одинаковые ⇒ центр масс у них находится в ~~цен~~ точке касания. По сути они обращаются по орбите с радиусом, равным радиусам самих звёзд.

Период нетрудно определить по 3-ему закону Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

№4 (продолжение)

Но опять же, можно сравнить систему с Землёй: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{2}$.

$a = R_\odot \approx 700\,000$ км $\approx 0{,}005$ а.е.

$T = \sqrt{\frac{0{,}005^3}{2}} = \sqrt{\frac{(5\cdot10^{-3})^3}{2}} = \sqrt{\frac{12.5\cdot10^{-8}}{2}} =$

$= \sqrt{6{,}25\cdot10^{-8}} = 2.5\cdot10^{-4}$ года ≈ 2 часа.

Солнце относится к классу G. Вот все классы звёзд, начиная с самой горячей: O, B, A, F, G, K, M.

(один бритый англичанин финики жевал как морковку) Как мы видим, класс K и F находятся рядом с классом Солнца. Это значит, что a^3 и $2w$ (отношение к массе Солнца 2-х звёзд) будет отличаться незначительно и примерно на: $\sqrt{\frac{a^3}{w}} \approx \sqrt{\frac{1.5^3}{1.5}} \approx$ в 1,5 раза.

Тогда класс F будет иметь период ≈ 3 часа, а класс K – примерно $\frac{4}{3}$ часа.

Ответ: для G звёзд типа Солнца $T = 2$ часа, для класса F $T \sim 3$ часа, для класса K $T \sim \frac{4}{3}$ часа.

ГАТ-05 бuз 7

№5.

Определю сначала размеры этой чёрной дыры. Как известно, 1-я космическая скорость чёрной дыры составляет скорость света. Тогда по формуле определю радиус R чёрной дыры:

$$c = \sqrt{G\frac{M}{R}}; \quad R = G\frac{M}{c^2};$$

$$R = \frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot 4.5\cdot10^{6}\cdot2\cdot10^{30}}{9\cdot10^{16}} =$$

$$= \frac{10^{36}\cdot10^{-11}\cdot4{,}5\cdot6{,}67}{9\cdot10^{16}} \approx 3.3\cdot10^{9}\,м = 3.3\cdot10^{6}\,км.$$

Теперь по той же формуле посчитаю радиус 1 чёрной дыры массой 1 масса Солнца:

$$R = \frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}{9\cdot10^{16}} \approx 0{,}7\cdot10^{3}\,м \approx 0{,}7\,км$$

Теперь определю, во сколько раз различаются их объёмы:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{(3.3\cdot10^{6})^3}{0{,}7^3} = \frac{3{,}5\cdot10^{19}}{0{,}35} \approx 10^{20}$$

Но так как нам нужно взять столько этих чёрных дыр, чтобы их суммарная масса составляла $4.5\cdot10^{6}$ масс Солнца, нам нужно взять $4{,}5\cdot10^{6}$ этих чёрных дыр => они будут занимать в $\approx 2\cdot10^{13}$ раз меньше места, чем занимала...

№5 (продолжение)

...одна чёрная дыра с массой $4.5 \cdot 10^6$ масс Солнца.

На каждую „маленькую" чёрную дыру будет приходиться объём:

$$V_1 = \frac{(3.3 \cdot 10^6)^3 \cdot \Pi \cdot \frac{4}{3}}{4.5 \cdot 10^6} \approx \frac{4}{3} 10^{13} \cdot \Pi \approx 4 \cdot 10^{13} км^3,$$

т.е. они будут рассредоточены вполне свободно и такая гипотеза ~~вы~~ имеет место быть.

Ответ: да, возможно.

№2

Первая космическая (круговая) скорость для земли составляет примерно 10км/с.

Отсюда угловая скорость спутника: $\frac{360°}{T} \approx \frac{360°}{90 мин} = 4°/мин$. ~~Вза~~ Т.к. угловой диаметр Солнца равен ~0,5°, то время заслонения равно примерно 8 секундам

По значению частоты и диаметру антенны можно определить, что наблюдение происходит на экваторе => даты, когда засветка может происходить, когда Солнце находится в зените, т.е. в дни осенних и весенних равноденствий.

Ответ: осенние и весенние равноденствие