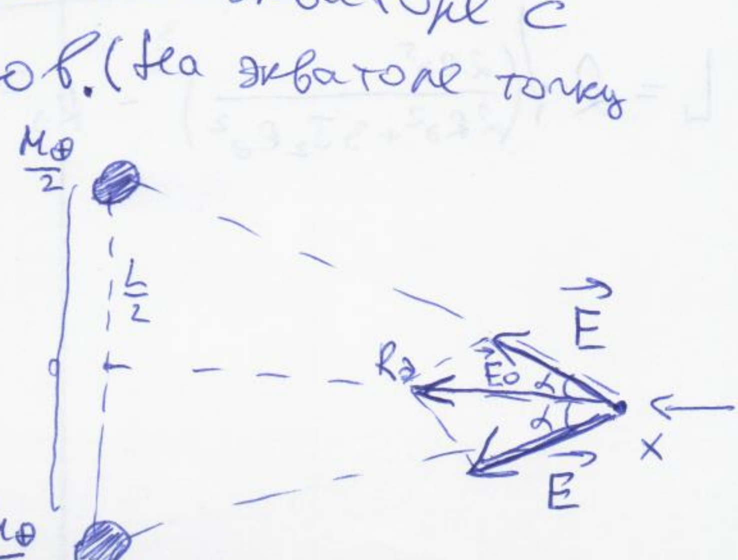
Задача №5. СПб-150 1/7

По условию существует два метода расчёта гравитационного потенциала Земли: I – старый с помощью двух негравитирующих масс, а II – по предоставленной ф-ле. Вспомним, что в электростатике понятие потенциала поля связано с его напряжённостью так: $E = -\operatorname{grad} \varphi$, где φ – потенциал. Воспользуемся этим соображением и для нашего гравитационного поля, однако в роли напряжённости электрического поля будет выступать удельная сила притяжения (полная сила, делённая на массу центрального тела, в нашем случае, на половину массы Земли. Также стоит отметить справедливость принципа суперпозиции: $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0$. Да, далее я буду обозначать удельную сила буквой E, мне так проще, простите:). Идея: рассмотрим потенциал и напряжённость в точке на экваторе с помощью обоих методов. (На экваторе точку брать удобнее, так как мы не знаем, находятся ли $\frac{M_\oplus}{2}$ в границах земного объёма. Также далее grad будет записываться как $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, так как вычисления производятся в системе координат, напоминающей полярную, только полярный угол постоянен.



Спроецируем на Ox: $E_0 = 2E\cos\alpha = \dfrac{GM_\oplus R_Э}{\left(\frac{L^2}{4}+R_Э^2\right)^{3/2}}$

$$\cos\alpha = \frac{R_Э}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+R_Э^2}}$$

$$E = \frac{GM_\oplus}{2\left(\sqrt{\frac{L^2}{4}+R_Э^2}\right)^2}$$

Далее вторым методом: на экваторе $\Phi=0°$, поэтому:

$$V(r;\Phi=0°) = \frac{GM_\oplus}{r} + \frac{J_2 R_\oplus^2}{2r^3}GM_\oplus$$

$$E_0 = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM_\oplus}{r^2} + \frac{J_2 R_\oplus^2 GM_\oplus(+3)}{2r^4}$$

В нашей задаче $r = R_Э$.

Приравниваем и выражаем L:

$$\frac{\cancel{GM_\oplus} R_Э}{\left(\frac{L^2}{4}+R_Э^2\right)^{3/2}} = \frac{\cancel{GM_\oplus}}{R_Э^2} + \frac{3J_2 R_\oplus^2 \cancel{GM_\oplus}}{2R_Э^4}$$

Калькулятора нет, не беда! Оценим!!!

$$\left(\frac{L^2}{4}+R_Э^2\right)^{3/2} = \frac{2R_Э^5}{2R_Э^2+3J_2R_\oplus^2} \approx \frac{2\cdot 6^3\cdot 10^9}{2+3\cdot 10^{-3}}$$

$3\cdot 10^{-3} \to 0$.

$$L = 2\sqrt{\left(\frac{2R_Э^5}{2R_Э^2+3J_2R_\oplus^2}\right)^{\frac{3}{2}} - R_Э^2} \cong 2\cdot 6^{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot 10^{\frac{27}{2}\cdot\frac{1}{2}} \simeq 4\cdot 10^{8}\ \text{км}.$$

Задага №1. СПБ-150

Посгитаем периоды маятников на полюсе и экваторе:

$$T_Э = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_Э}}, \quad g_Э = g_0 - a_{ц.с} = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R = \frac{GM}{R^2} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$T_П = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_П}}, \quad g_П = g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

По усл: $T_Э = 1{,}02\, T_П$, пусть $1{,}02 = \alpha$. Тогда:

$$g_Э = \frac{g_П}{\alpha^2} \iff \frac{GM}{R^2} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{GM}{\alpha R^2} \quad (1)$$

По усл: $T_П(r = 130\text{км}) = T_Э$.

$$\frac{l}{g_П(r)} = \frac{l}{g_Э} \iff g_П(r) = g_Э.$$

$$\frac{GM}{(R+r)^2} = \frac{GM}{R^2} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \quad (2)$$

Найдём общие гасти: (1)=(2): $(R+r)^2 = \alpha^2 R^2$.

$R^2(\alpha^2 - 1) - 2Rr - r^2 = 0.$

$D = 4\alpha^2 r^2.$

$R_0 = \frac{2r + 2\alpha r}{2(\alpha^2 - 1)} = \frac{r}{\alpha - 1} = 6500\text{ км}.$

Тогда максимальная скорость, которую можно развить на поверхности планеты, не покидая её - это первая космическая. Может быть кто-то и умеет бегать с такой скоростью без двигателя, хоть где-то штурмовики не должны быть полезны :)): $\vartheta_m = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ ⟹

$\Rightarrow$ (GM) можно выразить из ур-ия (1):

$$GM = \frac{(2\pi)^2 \alpha^2 R^3}{T^2(\alpha^2-1)}. \text{ Тогда: } \vartheta_м = \frac{2\pi\alpha R}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \approx$$

$\approx 7{,}1$ км/с.

Задача 2.

По условию $L_{к_1} = L_{к_2}$ и $L_{г_1} = L_{г_2}$. Это говорит о том, что каждый гигант и карлик принадлежат одному спектральному классу, то есть ~~каждый~~ оба карлика либо голубые, либо красные и аналогично с гигантами. Известно, что существует теоретический класс голубых карликов, в него будут попадать звёзды после стадии коричневых карликов (кажется). Однако их возраст должен превышать возраст вселенной на текущий момент. Поэтому можно сделать вывод, что, если карлики видят сейчас, то они красные. А вот с голубыми гигантами проблем нет, это могут быть молодые горячие звёзды класса W или O. Следовательно гиганты голубые, всё ок.

$\Rightarrow$

=> Характерные размеры и массы этих объектов таковы:

$$M_Г \sim 50 M_\odot \qquad m_к \sim 0{,}3 M_\odot$$
$$R_Г \sim 25 R_\odot \qquad r_к \sim 0{,}6 R_\odot$$

В случае, если двойная система состоит из гиганта + карлика, то центр масс системы будет находится внутри гиганта. Тогда карлик будет находится на достаточном расстоянии от гиганта, чтобы можно было его разрешить с помощью телескопа.

Однако, если сис-ма состоит из карлик + карлик или гигант + гигант, то расстояние между ними будет соизмеримо с радиусами, и следовательно разрешить их не получится в силу большого расстояния. Сис-ма карлик + карлик была бы старше, так как голубые гиганты - молодые звёзды. Но в данном случае сис-мы карлик + гигант одинаковых спектр. классов примерно равного возраста.

6/7

№4. Задача.

Масса белого карлика может находиться в диапазоне: $0{,}6 M_\odot \le M \le 1{,}4 M_\odot$

~~Предел~~ ~~Бушманова~~ ~~Предел~~ ~~Чандрасекара~~ (не буду позориться).

Падение блеска вызвано прохождением второго компанента по диску первого для наблюдателя. Это происходит каждое покрытие, то есть дважды за период обращения: $T = 1$ год.

Расхождение с линией $H_\alpha = 6563\,\text{Å}$ вызвано радиальной скоростью: Эф. Доплера: $\frac{\vartheta}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vartheta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c$; Запишем III_3 Кеплера!

у.м: $M \cdot r_1 = m \cdot r_2$, $r_1 + r_2 = a$.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}.$$

m — масса карлика.

Если считать орбиты тел круговыми

$$\vartheta = \frac{\pi a}{T} \Rightarrow a = \frac{\Delta\lambda c T}{\pi\lambda}$$

Подставим в 3 Кеплера:

$$m = \frac{4\Delta\lambda^3 c^3 T}{\pi\lambda^3 G} - M \Big|_{M\in[0{,}6M_\odot;\,1{,}4M_\odot]} = \left[\begin{array}{l} 2{,}6\cdot10^{30} - 1{,}2\cdot10^{30} = 1{,}4M_\odot \\ 2{,}6\cdot10^{30} - 2{,}8\cdot10^{30} < 0. \end{array}\right.$$

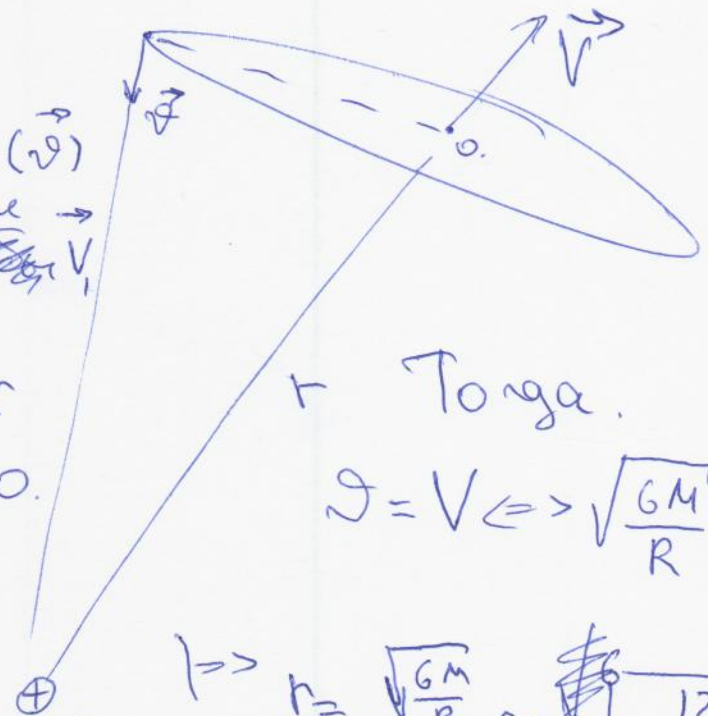
Поэтому: $m \in [1{,}3M_\odot; 1{,}4M_\odot]$

Задача №3. СПб-150

Фиолетовое смещение – это то же всем известное "красное смещение", только вызванное движением объекта к наблюдателю, а не от него.

По з. Хаббла галактики отдаляются от нас со скорость $V = Hr$, где r – расстояние до неё.

Однако если диск галактики движется ($\vec{\vartheta}$) со скоростью ~~хотя бы~~ хотя бы меньше V, то смещение будет красным, то есть $z > 0$.



Пусть радиус диска галактики $R \approx 20$ кпк, а масса $\sim 10^9 M_{\odot}$

Тогда.

$$\vartheta = V \Leftrightarrow \sqrt{\frac{GM}{R}} = H \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{\frac{GM}{R}}}{H} \simeq \boxed{10^{12}\ \text{пк}}$$

$H \approx 70 \frac{\text{км}/\text{с}}{\text{Мпк}}$