№1 $\boxed{\text{Дол} - 0{,}47}$

Период математического маятника

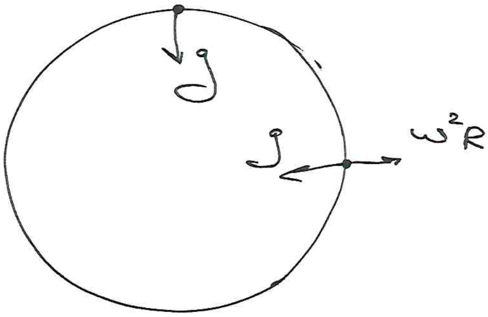
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

На полюсе:

$g_p = \dfrac{GM}{R^2}$, M – масса планеты, R – ~~период~~ радиус планеты

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{lR^2}{GM}}$$

На экваторе:



$$g_e = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T_0}$ T_0 – период обращения планеты

$$T_e = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{GM}{R^2} - \omega^2 R}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}R}}$$

На полюсе на высоте $h = 130$ км:

$$g_p' = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$T_p' = 2\pi\sqrt{\frac{l(R+h)^2}{GM}}$$

Запишем условие

T_p – 100%

T_e – 102%

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi\sqrt{\frac{lR^2}{GM}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}R}}} = \frac{100}{102} \quad (1)$$

И второе условие

$$T_p' = T_e$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l(R+h)^2}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}R}} \quad (2)$$

Поработаем с выражением (2) | Дол-047 |

$$\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\ell(R+h)^2}{GM}} = \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\ell}{\frac{GM}{R^2}-\frac{4\pi^2}{T_0^2}R}} \quad \uparrow^2$$

$$\frac{(R+h)^2}{GM} = \frac{1}{\frac{GM}{R^2}-\frac{4\pi^2 R}{T_0^2}} \quad (3)$$

Обозначим $\frac{102}{100}$ за α. Тогда выражение (1

$$\frac{\frac{\ell}{\frac{GM}{R^2}-\frac{4\pi^2}{T_0^2}R}}{\frac{\cancel{\ell}R^2}{GM}} = \alpha^2 \Rightarrow \frac{1}{\frac{GM}{R^2}-\frac{4\pi^2 R}{T_0^2}} = \alpha^2\cdot\frac{R^2}{GM} \quad (4)$$

Приравним (3) и (4)

$$\frac{(R+h)^2}{\cancel{GM}} = \alpha^2\cdot\frac{R^2}{\cancel{GM}}$$

$$R^2+2Rh+h^2=\alpha^2R^2 \Leftrightarrow R^2(\alpha^2-1)-2h\cdot R-h^2=0$$

$$D=4h^2+4(\alpha^2-1)h^2=$$

$$=\cancel{4h^2}+4\alpha^2h^2-\cancel{4h^2}=4\alpha^2h^2$$

$$R=\frac{2h\pm 2\alpha h}{2(\alpha^2-1)}=\frac{h\cancel{(\alpha+1)}}{\cancel{(\alpha+1)}(\alpha-1)}=\frac{h}{\alpha-1}$$

$$\boxed{R=\frac{h}{\alpha-1}}$$

$$\alpha=1{,}02 \Rightarrow R=\frac{130\text{ км}}{0{,}02}=\boxed{6500\text{ км}}$$

Теперь преобразуем (3)

$$\frac{(R+h)^2}{\cancel{GM}}\cdot\frac{\cancel{GM}}{R^2}-\frac{4\pi^2R}{T_0^2}\cdot\frac{(R+h)^2}{GM}=1$$

$$\left(\frac{R+h}{R}\right)^2-\frac{4\pi^2R(R+h)^2}{T_0^2G}\cdot\frac{1}{M}=1$$

Максимальная скорость движения по поверх-
ности - I космическая

$$V=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\cancel{\frac{1}{M}=\frac{(R+h)^2\cdot T_0^2 G}{4\pi^2R^3(R+h)^2}} \Leftrightarrow \cancel{\frac{GM}{R}=\frac{4\pi^2R^2}{T_0^2}=V^2}$$

$$\cancel{V=2\pi\frac{R}{T_0}=2\cdot 3{,}14\cdot\frac{6500}{10\cdot 24\cdot 3600}}$$

$$\left(\left(\frac{R+h}{R}\right)^2-1\right)\cdot M=\frac{4\pi^2R(R+h)^2}{T_0^2G}$$

$$\left(\frac{R+h}{R}\right)^2-1=\frac{\cancel{R^2}+2Rh+h^2-\cancel{R^2}}{R^2}=\frac{2Rh+h^2}{R^2}$$

$$M=\frac{4\pi^2R^3(R+h)^2}{T_0^2G(2Rh+h^2)}=\frac{4\cdot 9\cdot(6500\cdot 10^3)^3}{(10\cdot 24\cdot 3600)^2\cdot 6{,}7\cdot 10^{-11}}\cdot\frac{6630^2}{1690000}$$

$$\frac{GM}{R}=\frac{4\pi^2R^2(R+h)^2}{T_0^2\cdot(2Rh+\cancel{h^2})}$$

$$V\approx\frac{2\pi R}{T_0}\cdot\frac{R+h}{\sqrt{2Rh}}=\frac{2\cdot 3\cdot 6500}{10\cdot 24\cdot 3600}\cdot\frac{6630}{1300}=$$

$$=\frac{\cancel{6}\cdot 65\cdot 663}{10\cdot\cancel{36}\cdot 130}\approx\frac{663}{130}\approx\boxed{5\ км/с}$$

№4 Дол-047

Эффект Доплера:

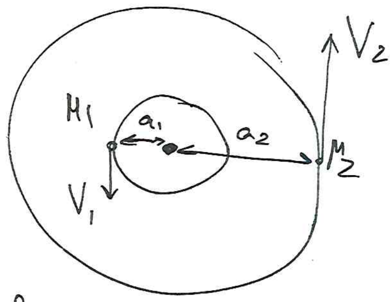
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V_r}{c}$$

$\lambda_{H\alpha} = 6563\,\text{Å}$ | ~~$\Rightarrow V_r = \frac{6{,}46}{6563}\cdot 3\cdot 10^5 \approx 0{,}7\cdot 10^{-4}\cdot 10^5 = 7$ км/с~~

$T = 0{,}5$ лет - период системы

III з. Кеплера:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{a^3}{GM_\Sigma}$$



Ур. вр. движ.:

$V = \omega r$

$$\Rightarrow V = \frac{2\pi}{T} r = \sqrt{\frac{GM_\Sigma}{a^3}}\, r$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM_\Sigma}{a^3}}\, a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{M_2^2 \cdot G\cancel{M_\Sigma}}{a^3 M_\Sigma^{\cancel{2}}}\, a^2} = \sqrt{\frac{GM_2^2}{aM_\Sigma}}$$

Правило рычага:

$M_1 a_1 = M_2 a_2$

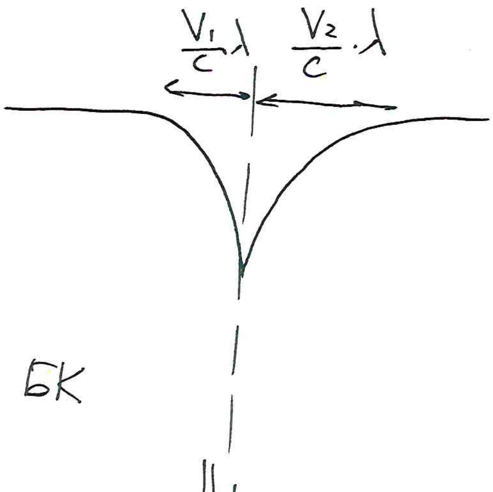
$a_1 + a_2 = a$

$M_1 + M_2 = M_\Sigma$

$$a_1 = \frac{M_2}{M_\Sigma}\, a$$

Аналогично

$$V_2 = \sqrt{\frac{GM_1^2}{aM_\Sigma}}$$



Пусть 1 - звезда-компаньон, 2 - БК

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{|V_2 + V_1|}{2c}$$

$$\Rightarrow |V_2 + V_1| = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\cdot 2c = 42 \text{ км/с}$$

$$\left| \sqrt{\frac{GM_1^2}{aM_\Sigma}} + \sqrt{\frac{GM_2^2}{aM_\Sigma}} \right| = 42 \text{ км/с} = V_r$$

$$\left| \sqrt{\frac{G}{aM_\Sigma}} \left(M_1 + M_2 \right) \right| = V_r$$

$\cancel{4}\sqrt{\frac{G}{aM_\Sigma}}\,|M_1+M_2| = V_r \quad \uparrow^2$

$|$ Дол-047 $|$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 \cdot GM_\Sigma}{T^2}}$$

$$\cancel{4}\cdot\frac{G}{\sqrt[3]{\frac{4\pi^2 GM_\Sigma}{T^2}}\cdot M_\Sigma}(M_1+M_2)^2 = V_r^2$$

$$\frac{\cancel{4}G}{\sqrt[3]{\frac{T^2 G}{4\pi^2}}\,M_\Sigma^{4/3}}\cdot(M_1+M_2)^2 = V_r^2$$

$$\frac{(M_1+M_2)^2}{(M_1+M_2)^{4/3}}\cdot\frac{T^{-2/3}\cdot G^{2/3}\cdot\cancel{4}}{\sqrt[3]{4\pi^2}} = V_r^2$$

$\{\ M_2 \in [0{,}8M_\odot;\ 1{,}4M_\odot]$

$$(M_1+M_2)^{2/3}\cdot T^{-2/3}\cdot G^{2/3}\cdot\frac{\cancel{4}}{\sqrt[3]{4\pi^2}} = V_r^2 \qquad \uparrow^{3/2}$$

$$(M_1+M_2)\cdot T^{-1} G\cdot\frac{\cancel{8}}{\cancel{2\pi}}2\pi = V_r^3$$

$$\cancel{M_1+M_2 = \frac{2V_r^3\cdot\pi T}{\cancel{4}G} = \frac{\cancel{7000^3\cdot 3\cdot 2}}{\cancel{4(0{,}5\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\cdot 7\cdot 10^{-11})}}}$$

$$M_1+M_2 = \frac{2V_r^2T}{2\pi G}$$

$$\cancel{10^{30}} = \frac{\cancel{2}\cdot 7000^3\cdot\cancel{3}\cdot 0{,}5\cdot 24\cdot 3600\cdot 365}{\cancel{6{,}7}\cdot 10^{-11}} =$$

$$= 5\cdot 24\cdot 36\cdot 365\cdot 7^3\cdot 10^{21} \approx 380^3\cdot 10^{22} \approx 5{,}5\cdot 10^4\cdot 10^3\cdot 10^{22} =$$

$$= 5{,}5\cdot 10^{29}$$

$$M_1+M_2 = \frac{V_r^3 T}{2\pi G} = \frac{3^3\cdot 7000^3\cdot 0{,}5\cdot 24^4\cdot 3600\cdot 365\cdot 2^3}{\cancel{2\cdot 3}\cdot 6{,}7\cdot 10^{-11}} =$$

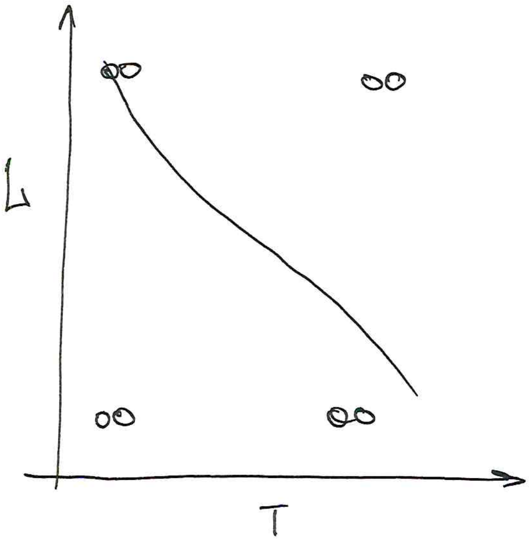
$$= \frac{7^{3^2}\cdot 2\cdot 36\cdot 365\cdot 10^{22}\cdot 2^3}{\cancel{7}} = 3\cdot 49\cdot 72\cdot 365\cdot 10^{22}\cdot 8 \approx 3{,}0\cdot 10^{30}\ \text{кг} \approx$$

$\cancel{\approx 0{,}2M_\odot} \approx 1{,}5M_\odot \implies \boxed{M_1 \in [0{,}1M_\odot;\ 0{,}7M_\odot]}$

$\boxed{5}$

№2 | Дол-047 |

Мы точно не увидим системы красный карлик + голубой гигант из-за большой разности в возрастах звезд



	K_1		K_2		$Г_1$		$Г_2$	
	кр.	гол.	кр.	гол.	кр.	гол	кр.	гол
1	X		X			X		X
2	X			X		X	X	
3	X			X	X			X
4		X	X			X	X	
5		X	X		X			X
6		X		X	X		X	
7		X		X	X		X	
8	X			X	X			X
9		X	X		X			X
10	X		X			X		X
11	X			X		X	X	
12		X	X			X	X	

Эквивалентные:

~~1+10~~
~~2+3~~
~~3+4~~
~~6+7~~
~~8+9~~
11+12 } 6

1+10
2+3
4+5
6+7
8+9
11+12 } 6

Всего 6 вариантов:

1: КК + КК + ГГ + ГГ
2: КК + ГК + ГГ + КГ
~~3: КК+ГК+КГ~~
3: ГК + КК + КГ + ГГ
4: ГК + ГК + КГ + КГ
5: КК + ГК + КГ + ГГ
6: КК + ГК + КГ + ГГ

Экв.: 5+6+3+2

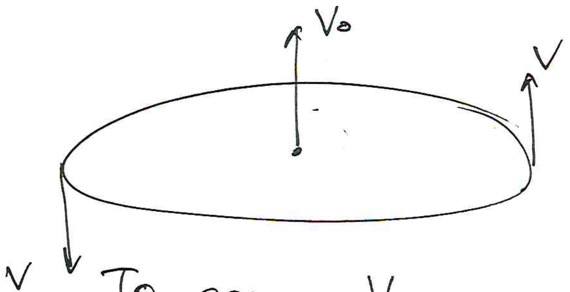
Итого 3 варианта:

1: КК+КК+ГГ+ГГ
2: ГК+ГК+КГ+КГ
3: КК+ГК+КГ+ГГ

Голубой карлик <=> белый карлик
3 вариант невозможен

~~Варианты~~: a) КК+КК и ГГ+ГГ – обведена более старая
b) ГК+КГ и ГК+КГ – одинаковые
c) ГК+ГК и КГ+КГ – неизвестно

$\boxed{6}$



№3

$\boxed{\text{Аол-047}}$

Галактика сама вращается со скоростью V, на „плато" достигающей ~250 км/с

То есть V_0 - скорость удаления центра масс - должна быть $\geq V$

$V_0 \geq V$

Закон Хаббла:

$$V = Hr \rightarrow r = \frac{V}{H} = \frac{250\cancel{000}}{68\cancel{000}} = \boxed{3{,}7 \text{ Мпк}}$$

Как раз расстояние, на котором закон Хаббла начинает работать

Если попробовать оценить еще и вклад гравитационного красного смещения, то можно понять, что оно пренебрежимо мало (~~НЕТ! продолжение на стр. 8~~)

$$\frac{GM}{Rc^2} + \frac{Hr}{c} = \frac{V}{c} \Rightarrow r = \frac{V - \frac{GM}{Rc}}{H}$$

№5

Максимум потенциала достигается в предполагаемых точках расположения масс

$V'(r,\varphi) = 0$ — продифференцируем и найдем экстремум

$\varphi = 90^\circ$ т.к. массы расположены вдоль оси вращения Земли

$$\left(\frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 \cdot \frac{3\sin^2 90 - 1}{2}\right)\right)' = 0$$

$$\left(\frac{GM_\oplus}{r} - \frac{J_2 GM_\oplus R_\oplus^2}{r^3} \cdot \frac{3 \cdot 1 - 1}{2}\right)' = 0$$

$$-\frac{GM_\oplus}{r^2} + 3\frac{J_2 GM_\oplus R_\oplus^2}{r^4} = 0 \quad \Big| \cdot r^2$$

$$\frac{3J_2 \cancel{GM_\oplus} R_\oplus^2}{r^2} = \cancel{GM_\oplus}$$

$$r = \pm\sqrt{3J_2}\, R_\oplus = \pm 1{,}7 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot R_\oplus \approx \pm 6 \cdot 10^{-2} R_\oplus = \pm 384 \text{ км}$$

r – это от центра Земли

$$r_0 = 2r = \boxed{768 \text{ км}}$$

№2 (продолжение)

c) ГК+ГК – сложно разрешиться

=> a) КК+КК и ГГ+ГГ
более старая

b) ГК+КГ и ГК+КГ
одинаковые

~~№3 (продолжение)~~