Задача 1

Сперва хорошо было бы определить широту φ этого пункта. Поскольку речь идёт о российском селе, то мы имеем право рассматривать ~~лишь~~ северное полушарие, пользуясь формулами кульминаций $h_в = 90° - \varphi + \delta$ и $h_н = \varphi + \delta - 90°$. В России, как известно, полярная ночь наблюдается зимой, причём её серединой является день зимнего солнцестояния 21 декабря. Поскольку ночь длится 60 суток, то она началась за 30 дней до 21.12, а закончилась ещё только через 30 дней, т.е. ~20 января. Это, как известно, №20-й день года.

Для этого момента времени нетрудно вычислить склонение Солнца $\delta_☉ = \varepsilon \sin \frac{(N-81) \cdot 360°}{365}$, где $\varepsilon = 23{,}5°$

Подставляем, $\sin\left(\frac{20-81}{365} \cdot 360°\right) \approx -\sin\frac{360°}{6} = -\sin 60° \approx -0{,}866$

$\Rightarrow \delta_☉ = -23{,}5° \cdot 0{,}866 \approx -20{,}35°$

Условие последнего дня полярной ночи (аналогично первого) — верхняя кульминация светила проходит на высоте 0°

$\Rightarrow 90° - \varphi + \delta_☉ = 0°$, откуда $\varphi = 90° + \delta_☉ = 90° - 20{,}35° = 69{,}65° \approx \boxed{70°}$ (Кстати, это реально больше $90° - \varepsilon = 66{,}5° \Rightarrow$ никаких противоречий нет!)

Зная это, уже нетрудно определить и склонение интересующей нас звезды δ. В самом деле, по условию, для неё $h_в = 2h_н \Leftrightarrow 90° - \varphi + \delta = 2(\varphi + \delta - 90°) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\varphi + \delta = 270° \Rightarrow \delta = 270° - 3\varphi \approx 270° - 210° = \boxed{60°}$

Это и есть ответ задачи! (Ответ: $\delta = 60°$)

Задача 2.

Во-первых, разберемся с характеристиками самой антенны. Она принимает сигнал (электромагнитные волны) со спутника на частоте ν $\Rightarrow$ диапазон длин волн её работы $\lambda = \frac{c}{\nu}$, $c = 3\cdot10^8$ м/с, $\nu = 12$ ГГц $= 12\cdot10^9 \frac{1}{c}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{3\cdot10^8}{12\cdot10^9} = 0{,}25\cdot10^{-1}$ м $= 25$ мм – это радиодиапазон.

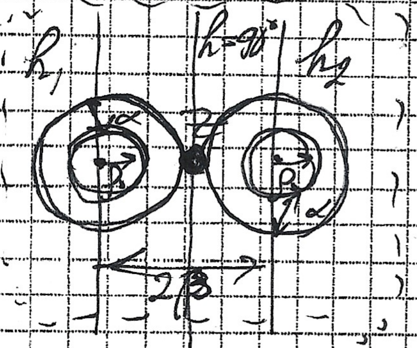
Зная диаметр нашей антенны $D = 2$ м, мы можем вычислить её разрешающую способность $\alpha = \frac{\lambda}{D}$ (т.к. диапазон радиоволн, а антенна параболическая, а не круглая, писать коэф-т 1,22 мы не имеем права, т.к. в реальности здесь он уже ~ 1)

Итак, $\alpha = \frac{25\cdot10^{-3}}{2} = 1{,}25\cdot10^{-2}$ рад $\approx \boxed{0{,}7^\circ}$

Так как мы работаем в радиодиапазоне, земная атмосфера не создает серьезных более мощных помех, но налагает тем самым ограничений на разрешающую способность! Получается, если спутник находится на угл. расстоянии, равном или меньшем α от $\odot$, антенна не сможет отличить его сигнал от помех, создаваемых звездой (в реальности, конечно, наверняка и на больших расстояниях будут шумы, но в условной задаче значения α достаточно, особенно учитывая, что $\alpha > \rho_\odot$) Ясно, что угловой радиус Солнца $\rho_\odot = 32' \approx 0{,}5^\circ$ сравним с α $\Rightarrow$ мы не можем пренебречь размерами звезды в небе. То есть оценка на угловое удаление спутника от Солнца для „чистой" передачи возрастет до $\beta = \alpha + \beta_0 = \boxed{1,2^\circ}$.

Теперь надо как-то оценить взаимное расположение спутника и Солнца в небе Земли в зависимости от даты. Предположим, что ретрансляционный спутник находится на геостационарной (или даже просто геосинхронной орбите). Наверное, в реальности это действительно так. (В любом случае, выгодно выбирать орбиту этого спутника так, чтобы он как можно реже перестраивался под положение неподвижной антенны и как можно чаще находился в контакте с ней, т.е. все время был в одной точке неба относит. антенны $\Rightarrow$ это геосинхронная орбита)

Кроме того, удобно расположить антенну в подспутниковой точке, т.е. чтобы аппарат все время находился в зените.



Тогда, чтобы случилось затмение, Солнце должно хотя бы иногда регулярно в течение этого периода времени подходить на расстояние β к зениту. Очевидно, что такое затмение в принципе невозможно на широтах $|\varphi| > |\varepsilon + \beta|$, т.е. $\varphi \in [-90^\circ; -24,7^\circ) \cup (24,7^\circ; 90^\circ]$.

На остальных широтах условие затмения может быть сформулировано так: $z = |\delta - \varphi| \leq \beta$

Видно, что искомая дата зависит от широты, как

~~на~~ продолжительность периода затмения.

~~[illegible]~~

Поэтому рассмотрим наиболее вероятный вариант — геостационарный спутник, т.е. $\varphi = 0$

Тогда $-\beta \le \delta_0 \le \beta$, $\beta = 1{,}2^\circ \approx 0{,}05$ рад.

Как мы знаем, $\delta_0 = \varepsilon \sin\left(\frac{N-81}{365}\cdot 360^\circ\right)$

$\Rightarrow -\frac{\beta}{\varepsilon} \le \sin\left(\frac{N-81}{365}\cdot 360^\circ\right) \le +\frac{\beta}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon} \approx \frac{1}{20}$ рад $\ll 1$

$\Rightarrow$ в крайних значениях N $\frac{N-81}{365} = \pm\frac{1}{20}$

$\Rightarrow N-81 = \pm\frac{365}{20} \approx 18$ сут $\Rightarrow 63 \le N \le 99$

т.е. общ. диапазон дат — $\boxed{\text{с 4 марта по 9 апреля}}$

Продолжительность — почти целый месяц!

Кроме того, нужно учесть и симметрично противоположный период в окрестностях дня осеннего равноденствия.

Это будет также примерно с $\boxed{\text{6 сентября по 10 октября}}$

Вроде как-то так :)

Задача 3

Зная массу центрального компонента и радиусы орбит планет, можем сразу применить III закон Кеплера:

$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{m}$, где P — период обращения в годах

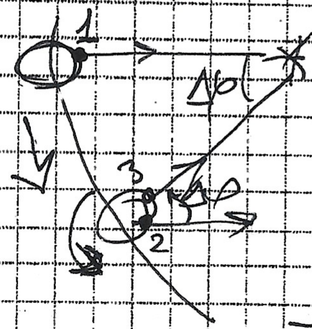
Для первой планеты (при $a = \frac{1}{2}$ а.е.) $P^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$ года

Для второй: (при $a = \frac{4}{5}$ а.е.) $P'^2 = \frac{32}{125} = \frac{16}{25}\cdot\frac{2}{5}$

$\Rightarrow P' = 0{,}8\cdot\frac{1{,}41}{2{,}24} \approx \frac{1}{2}$ года, т.е. период обращения внешней планеты в 2 раза больше внутренней: $P' = 2P$

Пусть период осевого вращения внутренней планеты S, тогда этот же период для внешней $2S = S'$

Как известно, солнечные сутки — это промежуток времени между двумя последовательными одинаковыми положениями светила в небе (напр. заходами, кульминациями). Они отличны от периода осевого вращения, поскольку за время S (или S') планета успевает сместиться по орбите на угол $\Delta\varphi$, что меняет направление на звезду, т.е. ей еще нужно довернуться на этот угол $\Delta\varphi$ (см. рис.). Так, период осевого вращения — это период между положениями 1 и 2,



а продолжительность T солн. суток — между 1 и 3.

Фактически, это синодический период вращения планеты вокруг звезды P и вокруг своей оси S. ($P > S$ по усл.)

$$T = \frac{PS}{P \pm S}$$, знак „−", если напр. вращений совпадают, „+" — иначе.

Тогда из условия $T = T' \Rightarrow \frac{PS}{P \pm S} = \frac{4PS}{2P \pm 2S} = \frac{2PS}{P \pm S}$

Заметим, что если знаки в знаменателях совпадают, то мы получим $1 = 2$, чего не бывает $\Rightarrow$ знаки разные

$$\left[\begin{array}{l} \frac{PS}{P+S} = \frac{2PS}{P-S} \Rightarrow 3S = -P, \text{ но } P, S > 0 \Rightarrow \varnothing \\ \frac{PS}{P-S} = \frac{2PS}{P+S} \Rightarrow 3S = P \Rightarrow S = \frac{P}{3} = \frac{1}{12} \text{ года} \approx \boxed{1} \text{ мес} \end{array}\right.$$

Итак, это единственно возможный ответ!

Тогда для внутр. планеты $S = 1$ месяц ≈ 30 сут

внеш. планеты $S' = 2$ месяца ≈ 60 сут

~~Задача 4~~. Можно даже попробовать чуть более строго это обосновать.

В самом деле, исходя из рисунка,

$$T = \frac{2\pi + \Delta\varphi}{\omega_{пл}}, \quad \omega_{пл} = \frac{2\pi}{S}, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi S}{P}$$

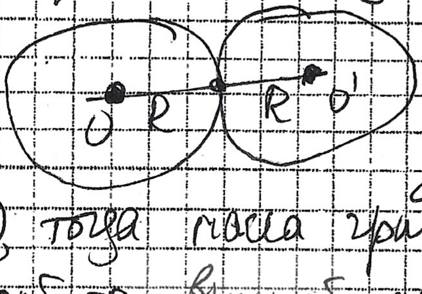
$$T = \frac{2\pi + \frac{2\pi S}{P}}{2\pi / S} = \frac{SP+S^2}{P} = \frac{S(P+S)}{P}$$

Тут также, в случае вращения в обратную сторону (пов-ти планеты) $\Delta\varphi \to -\Delta\varphi \Rightarrow T \to \frac{S(P-S)}{P}$

Тогда, аналогично, $T = T' \Leftrightarrow \frac{S(P\pm S)}{P} = \frac{2S \cdot 2(P\pm S)}{2P} = \frac{2S(P\pm S)}{P}$ $\Rightarrow (P\pm S) = 2(P\pm S)$. Одинаковые знаки + или − нас вновь не устроят, т.к. получится $P = \pm S$, чего не бывает $\Rightarrow$ остается вариант $P+S = 2P-2S \Rightarrow 3S = P \Rightarrow S = \frac{P}{3}$ ч.т.д.

Задача 4.

Раз звезды одинаковы, они имеют одинаковые радиусы R, а ~~если~~ они соприкасаются пов-тями, также расстояние между их центрами равно 2R (см. рис.)



Масса системы при этом 2m. ~~Т.к. перио~~ Можем решать задачу двух тел в СО, связанной с центром O тогда масса грав. центра 2m, а большая полуось орбиты второй звезды 2R. Тогда период обращения всей системы равен периоду обращения второй звезды относительно первой и рассчитывается по обобщенному III закону Кеплера.

$$6M P^2 = 4\pi^2 a^3 \Rightarrow \frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{M},$$

где все величины выражены в а.е., годах и массах Солнца.

Для нашей тесной системы получим

$$\frac{P^2}{8R^3} = \frac{1}{2m} \Rightarrow P^2 = \frac{4R^3}{m} \Rightarrow \boxed{P = 2\sqrt{\frac{R^3}{m}}}$$

Если считать звезды типа Солнца, для них $R \approx \frac{1}{200}$ а.е., а $m = 1 m_\odot$. Пользуясь формулой,

$$P = 2\sqrt{\frac{1}{8\cdot 10^6}} = \frac{2}{10^3}\sqrt{\frac{1}{8}} \approx \frac{2}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1000} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 10^{-3} \approx 0{,}71\cdot 10^{-3} \approx \boxed{7{,}1\cdot 10^{-4} \text{ лет}}$$

С учетом того, что 1 год $\approx$ 365 сут, имеем

$$P \approx 2600\cdot 10^{-4} = \boxed{0{,}26 \text{ сут} \approx 6 \text{ часов}}$$

Что, в принципе, довольно неплохая оценка :)

Чтобы ответить на оставшиеся два вопроса, заметим, что $\frac{m}{m_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^3 \cdot \frac{\rho}{\rho_\odot}$, где ρ – плотность вещества звезд.

$$\Rightarrow P = 2\sqrt{\frac{(R/R_\odot)^3}{(m/m_\odot)}} = 2\sqrt{\frac{\rho_\odot}{\rho}} = 2\sqrt{\frac{1}{\rho}},$$ если измерять ρ в плотностях Солнца.

Солнце относится к классу G, который является промежуточным между F и K: F (горячие) $\rightarrow$ G $\rightarrow$ K (холодные)

В принципе, размеры звезд этих классов практически одинаковы (красные гиганты и карлики – это явно класс M, голубые гиганты – это скорее O и A)

В то же время, их температуры разные в средн

А именно $T(F) > T(G) > T(K)$

$\Rightarrow$ их светимости $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ (*) также отличаются: $L(F) > L(G) > L(K)$

Но как известно, $L \propto m^4$ (**) $\Rightarrow m(F) > m(G) > m(K)$ при фактически одних и тех же размерах

Значит, $\rho(F) > \rho(G) > \rho(K) \Rightarrow \frac{1}{\rho(F)} < \frac{1}{\rho(G)} < \frac{1}{\rho(K)}$

Наконец, с использованием полученного выше соотношения, отсюда $P(F) < P(G) < P(K)$, т.е. говоря на качественном уровне, периоды звёзд класса F слегка меньше солнечного, а класса K — слегка больше слегка, т.е. из (*) и (**) $\Rightarrow m \propto T \Rightarrow P \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$,

а $\frac{T(F)}{T(G)} \approx \frac{7000}{5800}$, $\boxed{\frac{T(K)}{T(G)} \approx \frac{4800}{5800}}$

$\Rightarrow P(F) \sim \frac{P(G)}{1,1} < P(G)$ а $P(K) \sim \frac{P(G)}{0,9} > P(G)$

Задача 6.

Если центральный объект массой $M = 4,5\cdot10^6 M_\odot$, состоит из N одинаковых черных дыр с массой $M_\odot$ то $N = \frac{M}{M_\odot} = \boxed{4,5\cdot10^6}$

Если каждая из N черных дыр имеет ~~радиус~~ массу $M_\odot$, то её размер — гравитационный радиус равен

$R_G = \frac{2GM_\odot}{c^2} = \frac{2\cdot6,67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}{9\cdot10^{16}} \approx \frac{27\cdot10^{19}}{9\cdot10^{16}} \approx 3\cdot10^3\ м \approx \boxed{3\ км}$

Тогда мин объем пространства (в метрике нашей Вселенной) приходящийся на 1 ч.д. равен $V = 8R_G^3 \approx 216\ км^3$

$\Rightarrow$ мин. объем скопления $V' = NV = 9,45\cdot10^8\ км^3$

а он же равен $V' = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4R^3$

$\Rightarrow$ мин $R^3 = 2,5\cdot10^8\ км^3 \Rightarrow$ мин $R = 0,8\cdot10^3$ км

где R — радиус самого скопления
$\underline{R = 0,5\cdot10^{3}\text{ км}}$. Тогда скорость ч.б. на границе этого скопления

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6,7\cdot10^{-11}\cdot 9\cdot10^{36}}{0,5\cdot10^{6}}} = \sqrt{10^{20}} = 10^{10}\frac{м}{с}$$

Заметим, что это больше скорости света $c = 3\cdot10^{8}\frac{м}{с}$ (действительно, $10^{10}\frac{м}{с} \gg 3\cdot10^{8}\frac{м}{с}$). Очевидно, что такого быть не может.

~~Тогда~~ Вообще, чтобы такая скорость была достигнута, мин. радиус скопления должен быть $\frac{GM}{c^2} \approx 6\cdot10^{6}$ км т.е. на 4 порядка больше! $\Rightarrow$ Среднее расстояние между ~~галактика~~ ч.б. увеличится на 4 порядка! т.е. станет $r = 5\cdot10^{1}$ км

~~$\Rightarrow$ Энергия пары взаимодействующих ч.б.~~

Короче, ответ: такого быть не может.