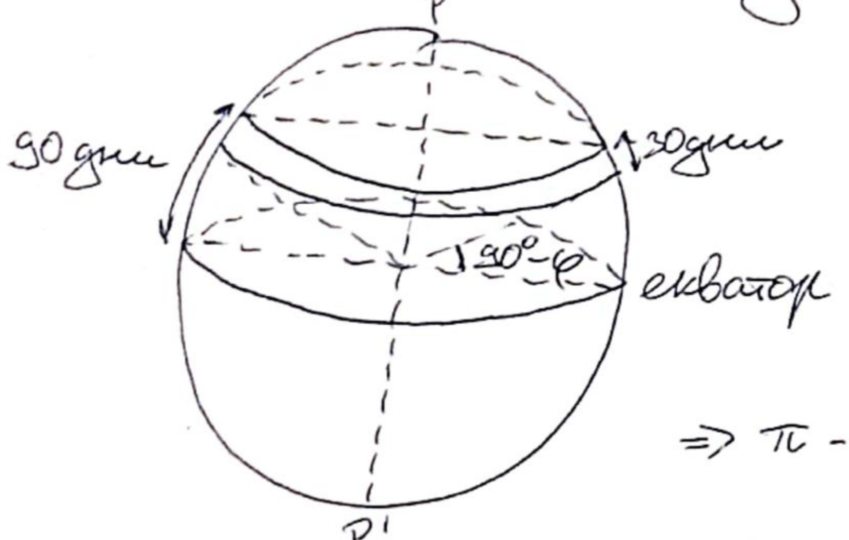
XXIX Санкт-Петербургска олимпиада по астрономия
Теоретичен тур
6 февруари 2022 г.

Задача 1.

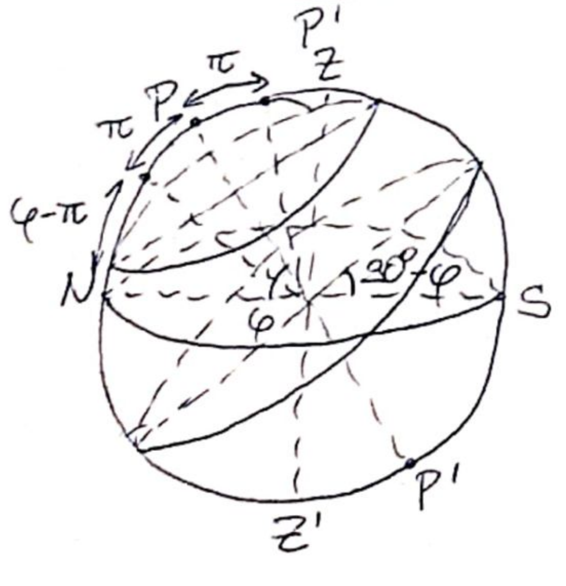
Слънцето достига деклинация $+\varepsilon$ за 3 месеца $\Rightarrow$ за 30 дни от изгрев Слънцето достига своята максимална деклинация.



φ - географска ширина на мястото

$$\Rightarrow 90° - \varphi = \frac{60}{90}\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\varphi = 90° - \frac{2}{3}\varepsilon$$



$\Rightarrow \pi$ - полярно отстояние на звездата

$$\varphi + \pi = 2(\varphi - \pi)$$

$$\varphi = 3\pi, \quad \pi = \frac{\varphi}{3}$$

Деклинацията на звездата е $\delta = 90° - \pi = 90° - \frac{\varphi}{3}$

$$\delta = 90° - \left(30° - \frac{2}{9}\varepsilon\right)$$

$$= 60° + \frac{2}{9}\varepsilon = 60° + \frac{2}{9} \cdot 23{,}5°$$

$$\delta \approx 65{,}2°$$

Задача 2.

Дължината на вълната на сигнала е

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{12.10^9}\,m = 0,025\,m$$

$\Rightarrow$ Дискът на Ейри, получен с антената, има големина:

$$\alpha[rad] = 1,22\,\frac{\lambda}{D} = 1,22 \,.\, \frac{0,025}{2} = 0,01525\ rad$$

$$\alpha = 52'$$

По време на „засветяването" Слънцето изминава ъгъл:

$$\varphi = 2\alpha + \delta_{\odot} = 2.52' + 31' = 135' = 2^{\circ}15'$$

$$\varphi = 2,25^{\circ}$$

Слънцето ще измине тази област от небето за интервал от време:

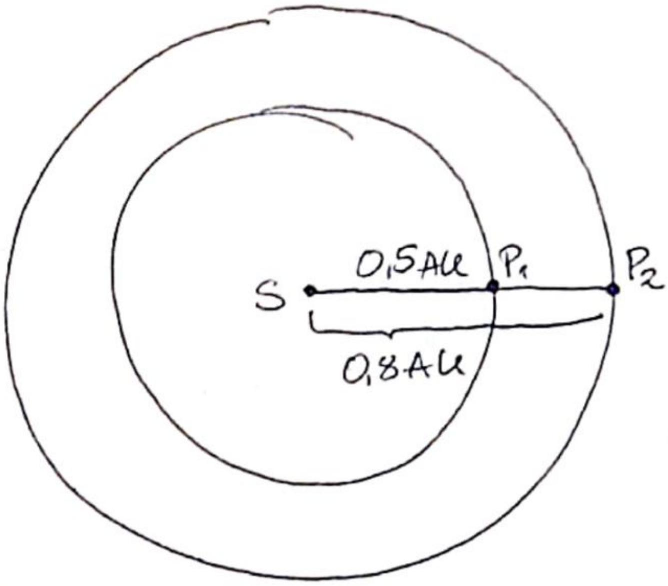
$$t_1 = \frac{2,25^{\circ}}{360^{\circ}} \,.\, 365^d = 0,00625 \,.\, 365^d = 2,28^d$$

От денонощното въртене на Земята този интервал е:

$$t_2 = \frac{2,25^{\circ}}{360^{\circ}} \cdot 24^h = 0,00625 \,.\, 24^h = 0,15^h$$

Scanned with CamScanner

Задача 3.



$a_1 = 0{,}5AU$

$M_S = 2M_\odot$

$a_2 = 0{,}8AU$

t_1, t_2 - периоди на околоосно въртене

T_1, T_2 - периоди на орбитално движение

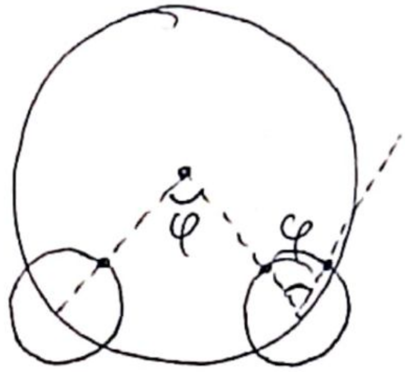
От III закон на Кеплер:

$$\frac{a_1^3[AU]}{T_1^2[yr]} = M_S[M_\odot] = 2 \Rightarrow T_1^2[yr] = \frac{0{,}5^3}{2} = \frac{0{,}125}{2} = 0{,}0625$$

$$\Rightarrow T_1 = 0{,}25\ yr$$

$$\frac{a_2^3[AU]}{T_2^2[yr]} = 2 \Rightarrow T_2^2[yr] = \frac{0{,}8^3}{2} = \frac{1{,}6}{\sqrt{10}}\ \frac{256}{1000},$$

$$T_2 = \frac{1{,}6}{\sqrt{10}}\ yr \approx 0{,}51\ yr$$



За ~~звездното~~ слънчевото денонощие на планетите имаме

$$\frac{\varphi_1}{2\pi} \cdot T_1 = \frac{2\pi + \varphi_1}{2\pi} \cdot t_1$$

$$\frac{\varphi_2}{2\pi} \cdot T_2 = \frac{2\pi + \varphi_2}{2\pi} \cdot t_2$$

$$t_2 = 2t_1$$

$$\frac{\varphi_1}{2\pi} \cdot T_1 = \frac{\varphi_2}{2\pi} \cdot T_2, \quad \varphi_1 \cdot T_1 = \varphi_2 \cdot T_2, \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \varphi_2 = \frac{T_1}{T_2}\varphi_1$$

$$(2\pi + \varphi_1)t_1 = (2\pi + \varphi_2)t_2 = (2\pi + \varphi_2) \cdot 2t_1$$

$$\varphi_1 = 2\pi + 2\varphi_2 = 2\pi + 2\frac{T_1}{T_2}\varphi_1, \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{1 - 2\frac{T_1}{T_2}}$$

Задача 3.

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi+\varphi_1}\cdot T_1 = \frac{\frac{2\pi}{1-2\frac{T_1}{T_2}}}{2\pi+\frac{2\pi}{1-2\frac{T_1}{T_2}}}\cdot T_1 = \frac{\frac{1}{1-2\frac{T_1}{T_2}}}{1+\frac{1}{1-2\frac{T_1}{T_2}}}\cdot T_1$$

$$= \cancel{\frac{\frac{1}{1-2\frac{T_1}{T_2}}}{}} = \frac{1}{2-2\frac{T_1}{T_2}}\cdot T_1 = \frac{1}{2-2\cdot\frac{0{,}25}{0{,}51}}\cdot 0{,}25\,yr$$

~~$t_1 \approx 0{,}38\,yr$~~

~~$t_2 = 2t_1 \approx 0{,}75\,yr$~~

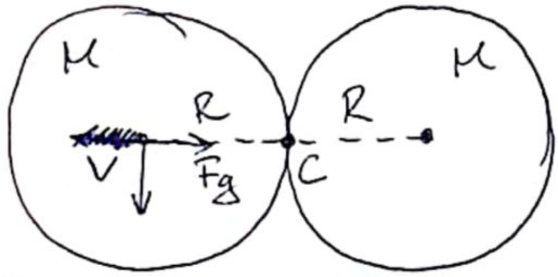
$t_1 \approx 0{,}245\,yr \approx 89{,}5^d$

$t_2 \approx 179^d$

$\Rightarrow$ Периодите на околоосно въртене на планетите са $89{,}5^d$ и 179^d съответно.

Задача 4.

Центърът на масите на системата е в точката на контакта на двете звезди.



За всяка от звездите имаме:

$$\frac{Mv^2}{R} = \frac{GM^2}{(2R)^2}, \quad T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{GM}{4R}, \quad \frac{R}{T} = \frac{v}{2\pi}, \quad \frac{R^2}{T^2} = \frac{v^2}{4\pi^2}, \quad \frac{R^2}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{GM}{4R}$$

$$\frac{4R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}, \quad \frac{(2R)^3}{T^2} = \frac{G(2M)}{4\pi^2}$$

При $M = M_\odot$, $R = R_\odot$: $\frac{(2R_\odot)^3}{T_0^2} = \frac{G(2M_\odot)}{4\pi^2}$

$R_\odot \approx \frac{1}{200} AU$, $2R_\odot \approx \frac{1}{100} AU = 10^{-2} AU$

$$\Rightarrow \frac{(10^{-2})^3}{T_0^2[yr]} = 2, \quad T_0[yr] \approx 7.10^{-4} yr \approx 6,132 h$$

Ако звездите бяха спектрален клас F, имаме: $M = 1,5M_\odot$, $R = 1,7R_\odot$

$$\frac{(2(1,7R_\odot))^3}{T_1^2} = \frac{G(2(1,5M_\odot))}{4\pi^2}, \quad \frac{2^3 \cdot 1,7^3 R_\odot^3}{T_1^2} = \frac{2G.1,5M_\odot}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1,7^3}{(T_1/T_0)^2} = 1,5, \quad \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 = \frac{1,7^3}{1,5} \Rightarrow \frac{T_1}{T_0} \simeq 1,8$$

$$T_1 = 1,8 . 6,132 h \approx 11,038 h$$

Задача 4.
Ако звездите бяха спектрален клас K, имаме: $M = 0,6M_{\odot}$, $R = 0,8R_{\odot}$

$$\Rightarrow \frac{0,8^3}{(T_2/T_0)^2} = 0,6 \;,\; \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^2 = \frac{0,8^3}{0,6} \Rightarrow \frac{T_2}{T_0} \approx 0,9$$

$$T_2 \approx 0,9T_0 \approx 5,519\,h$$

Задача 5.

$M = 4,5.10^6 M_\odot = 4,5.10^6 . 2.10^{30} kg = 9.10^{36} kg$

Ако масите на отделните черни дупки са $M_1 \approx M_\odot$, то броят им ще е $N = 4,5.10^6$.

Радиуса на черната дупка в центъра на Галактиката е:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2.6,67.10^{-11}.9.10^{36}}{9.10^{16}} m = 13,34.10^9 m$$

$$R = 13,34.10^6 km \approx 0,0889 AU$$

$\Rightarrow$ Концентрацията на черни дупки в центъра на галактиката става:

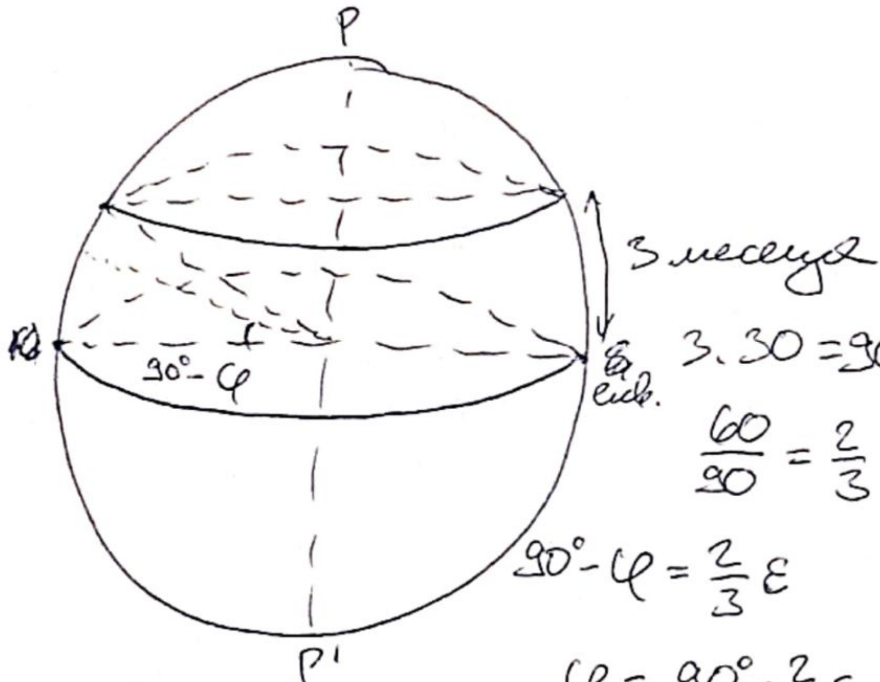
$$n = \frac{N}{V} = \frac{3}{4\pi}\frac{N}{R^3} = \frac{3}{4\pi} \frac{4,5.10^6}{0,0889^3} AU^{-3} \approx 1,53.10^6 AU^{-3}$$

При толкова висока концентрация малките черни дупки ще започнат да се сливат и да образуват една голяма черна дупка в центъра на галактиката

$\Rightarrow$ Конфигурацията от черните дупки ще бъде нестабилна и разглежданата ситуация НЕ е възможна.

Scanned with CamScanner

Чернова



$3 \cdot 30 = 90$

$\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

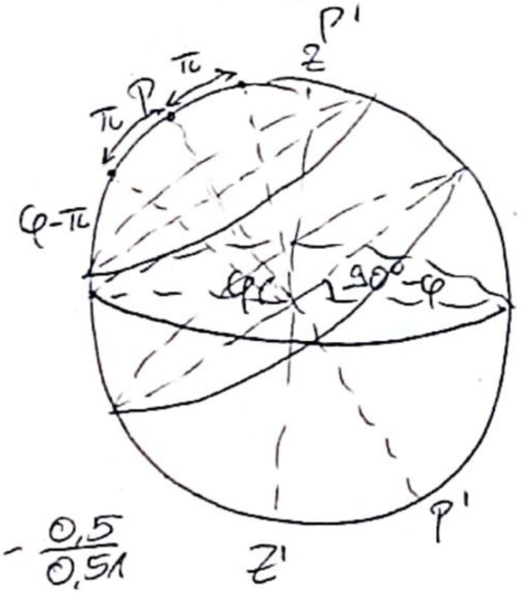
$$\begin{array}{r} 270 \\ - \ 47 \\ \hline 223 \end{array}$$

$90° - \varphi = \frac{2}{3}\varepsilon$

$\varphi = 90° - \frac{2}{3}\varepsilon = 90° - \frac{2}{3} \cdot 23{,}5°$

$= 90° - \left(\frac{47}{3}\right)°$

$= \left(\frac{223}{3}\right)° = 74\frac{1}{3}°$



$2(\varphi - \pi) = \varphi + \pi$

$2\varphi - 2\pi = \varphi + \pi$

$\varphi = 3\pi$

$\pi = \frac{1}{3}\varphi$

$2 - \frac{0{,}5}{0{,}51}$

$\delta = 90° - \pi = 90° - \frac{1}{3}\varphi = 90° - \frac{1}{3}\left(90° - \frac{2}{3}\varepsilon\right)$

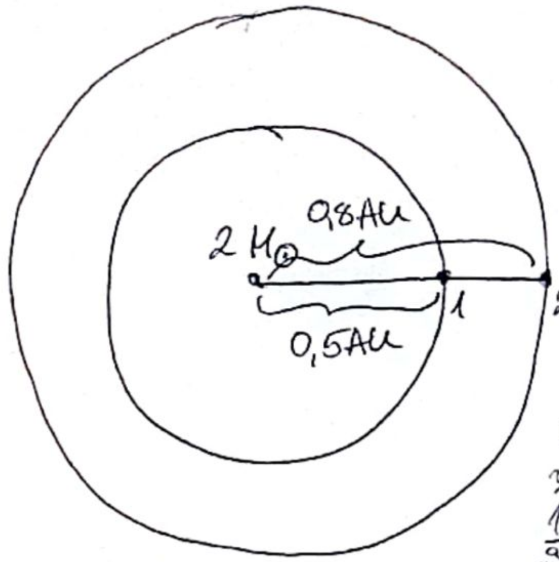
$= 60° + \frac{2}{9}\varepsilon$

$\frac{47}{9} + \frac{540}{9} = \frac{587}{9} = 65\frac{2}{9}$

$$\begin{array}{r} 625 \cdot 24 \\ \hline 2500 \\ 1250\ \ \\ \hline 15000 \end{array}$$

Чернова

3.



$$\frac{a^3[AU]}{T^2[yr]} = 2$$

$$T_1^2 = \frac{0,5^3}{2} = \frac{0,125}{2} = 0,0625$$

625 | 5

$$\frac{25.25}{125} \quad \frac{50}{625}$$

$$\frac{64.8}{512}$$

$$\frac{16.16}{96} \quad \frac{16}{256}$$

$$\Rightarrow T_1 = 0,25 yr$$

$$T_2^2 = \frac{0,8^3}{2} = \frac{0,512}{2} = 0,256$$

$$\cancel{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}} \Rightarrow T_2^2 = \frac{256}{1000}$$

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}, \quad T_2^2 = \frac{a_2^3}{a_1^3} T_1^2 = \left(\frac{0,8}{0,5}\right)^3 \cdot 0,25^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^3 \cdot 5^2 \cdot 10^{-4}$$

$$T_2 = \frac{16}{10\sqrt{10}} = \frac{1,6}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\varphi_1}{2\pi} \cdot T_1 = \frac{2\pi + \varphi_1}{2\pi} \cdot t_1$$

$$\frac{\varphi_2}{2\pi} \cdot T_2 = \frac{2\pi + \varphi_2}{2\pi} \cdot t_2$$

$$t_2 = 2t_1$$

$$\varphi_1 \cdot T_1 = \varphi_2 \cdot T_2, \quad \varphi_2 = \frac{T_1}{T_2}\varphi_1$$

$$(2\pi + \varphi_1) \cdot t_1 = (2\pi + \varphi_2) \cdot t_2$$

$$(2\pi + \varphi_1) \cdot \cancel{t_1} = (2\pi + \varphi_2) \cdot 2\cancel{t_1}$$

$$2\pi + \varphi_1 = 4\pi + 2\varphi_2$$

$$\varphi_1 = 2\pi + 2\varphi_2 = 2\pi + 2\frac{T_1}{T_2}\varphi_1$$

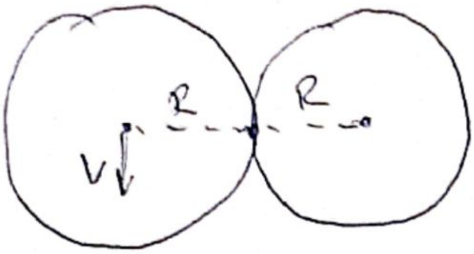
$$\varphi_1\left(1 - 2\frac{T_1}{T_2}\right) = 2\pi$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{1 - 2\frac{T_1}{T_2}}$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

Черновик

$$\frac{13,34\cdot10^{6}}{150\cdot10^{6}}=\frac{13,34}{150}=\frac{1334}{15000}=0,0889\text{ Ае}$$



$$T=\frac{2\pi R}{V}=\frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{4R}}}$$

$$\frac{MV^2}{R}=\frac{GM^2}{4R^2}$$

$$V^2=\frac{GM}{4R}$$

$$\sqrt{\frac{GM}{4R}}=\frac{2\pi R}{T}$$

$$\frac{GM}{4R}=\frac{4\pi^2R^2}{T^2}$$

$$\frac{GM}{4\pi^2}=\frac{4R^3}{T^2}$$

$$\frac{\overset{3}{6}4.8}{512}$$

$$\frac{0,512}{0,6}=\frac{512}{600}=2^9$$

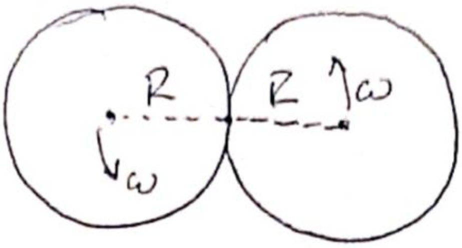
$$=0,8533\ldots$$

$2,25:360=0,00625$

```
 2250
-2160
  900
 -720
 1800
-1800
    0
```

Чернова

4.



$$\frac{(2R_\odot)^3}{T^2} = \frac{G2M_\odot}{4\pi^2}$$

$R_\odot = \frac{1}{200} AU$, $2R_\odot = \frac{1}{100} AU = 10^{-2} AU$

$\frac{(10^{-2})^3}{T^2[yr]} = 2$, $T^2[yr] = 0{,}5 . 10^{-6} = 5.10^{-7}$

$T^2[yr] = 50.10^{-8}$

$T[yr] \approx 7.10^{-4} yr \approx 6{,}132 h$

7.365
2555

$0{,}2555.24$
10220
$+5110$
$6{,}1320$

61.25
25
150
1525

2. $\alpha^{[rad]} = 1{,}22 . \frac{\lambda}{D} = 1{,}22 . \frac{0{,}025}{2} = 0{,}61.0{,}025 = 0{,}01525 \text{ rad}$
$= 52{,}43'$

$\nu = 12 \text{ GHz}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{12.10^9} m = 0{,}25.10^{-1} m = 0{,}025 m$

$0{,}01525 : 3{,}14 = 0{,}004854$

$\Rightarrow 0{,}004854 . 180 = 0{,}87376^\circ$

$0{,}87376.60$
$8{,}7376.6$
$52{,}4256$

$0{,}0167$ $\quad a(1+e)$

F: $1{,}5 M_\odot$, $1{,}7 R_\odot$

K: $0{,}6 M_\odot$, $0{,}8 R_\odot$