КОД: СПб-101

(2)

Плотность:

$\rho_2 = 3000\ \frac{кг}{м^3}$

$\rho_3 = 600\ \frac{кг}{м^3}$

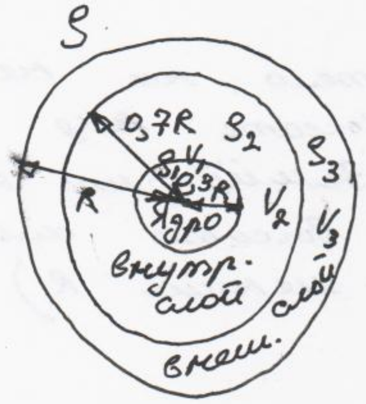
$\rho = 1530\ \frac{кг}{м^3}$

Объём слоёв:

$V_3 = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - (0{,}7R)^3\right)$

$V_1 = \frac{4}{3}\pi(0{,}3R)^3$

$V_2 = \frac{4}{3}\pi(0{,}7R)^3 - \frac{4}{3}\pi(0{,}3R)^3 = \frac{4}{3}\pi\left((0{,}7R)^3 - (0{,}3R)^3\right)$



Найдём плотность ядра ρ_1.

По определению плотности

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \rho_3 V_3}{V} =$$

$$= \frac{\rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi(0{,}3R)^3 + \rho_2 \cdot \frac{4}{3}\pi\left((0{,}7R)^3 - (0{,}3R)^3\right) + \rho_3 \cdot \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - (0{,}7R)^3\right)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \rho_1 \cdot (0{,}3)^3 + \rho_2 \cdot \left((0{,}7)^3 - (0{,}3)^3\right) +$$

$$+ \rho_3\left(1 - (0{,}7)^3\right) = (0{,}3)^3(\rho_1 - \rho_2) + (0{,}7)^3(\rho_2 - \rho_3) + \rho_3$$

В числах

$$1530 = (0{,}3)^3(\rho_1 - 3000) + (0{,}7)^3 \cdot (3000 - 600) + 600$$

$$1530 = 0{,}027 \cdot (\rho_1 - 3000) + 0{,}343 \cdot (3000 - 600) + 600$$

$$930 = 0{,}027 \cdot (\rho_1 - 3000) + 0{,}343 \cdot (3000 - 600) =$$

$$= 0{,}027\rho_1 - 81 + 1029 - 205{,}8$$

$$187{,}8 = 0{,}027\rho_1$$

$$\rho_1 \approx 6970 \left(\frac{кг}{м^3}\right)$$

Ответ: $6970\ \frac{кг}{м^3}$.

---

(1)

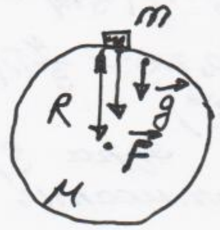
Длина экватора на планете — 60000 км по условию. Длина экватора Земли — 40000 км.

$l = 2\pi R$ (длина экватора прямо пропорциональна радиусу планеты)

$\Rightarrow R_{пл} = \frac{3}{2} R_{\oplus}$

(пл — планета, где живут переселенцы)

Что такое <u>ускорение свободного падения?</u> Планеты будем считать сферически симметричными.



$$\frac{GMm}{R^2} = mg \quad (\text{II з.Н.})$$

(закон всемирного тяготения)

(тело на нек. высоте над Землёй, но эта высота сильно меньше R)

$$\boxed{g = \frac{GM}{R^2}}$$

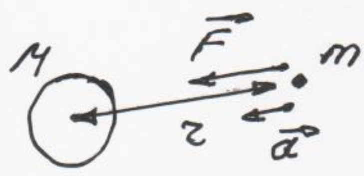
По условию, сила тяжести на Земле и на планете одинаковы

$\Rightarrow$ g одно и то же (для одной и той же массы смотрим $F_{тяж}$)

$$\Rightarrow \frac{M_{пл}}{R_{пл}^2} = 1 \;; \quad \text{где } [M] = M_\oplus, \quad [R] = R_\oplus$$

$$\boxed{M_{пл}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{9}{4}\,(M_\oplus)}$$

Что такое <u>период?</u>



$$\frac{GMm}{r^2} = ma \quad (\text{II з.Н.})$$

$$\frac{GM}{r^2} = a$$

$$\frac{GM}{r^2} = \omega^2 r$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

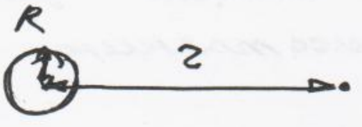
$$\boxed{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{r^3}}} = \boxed{2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$$

По условию, период планеты спутника совпадает с периодом Луны.

$$\Rightarrow \frac{r_{сп}^3}{M} = 1 \;; \quad \text{где } [r] = r_{☾}, \quad [M] = M_\oplus$$

$$\boxed{r_{сп} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\,(r_☾)}$$

Что такое угловые размеры?



$\alpha = \frac{R}{r}$ (расстояние от центра планеты до спутника несравнимо больше радиуса планеты)

По условию, $\alpha_{сп} = \alpha_☾$.

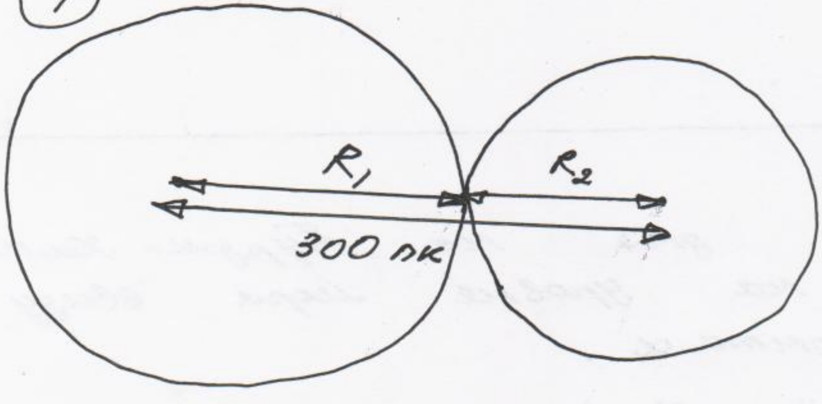
$\Rightarrow \frac{R_{сп}}{r_{сп}} = 1$; где $[R_{сп}] = R_☾$
$[r_{сп}] = r_☾$

$$\boxed{R_{сп} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\,(R_☾)}$$

Ответ: размер (радиус) $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\,R_☾$ ← лунный радиус, расстояние $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\,r_☾$. ← расстояние от Земли до Луны

---

(4)



По условию, мощность взрыва первой сверхновой была в 32 раза больше, чем мощность второй.

Можно считать, что взрыв обоих звёзд длился одинаковое количество времени; ведь скорость оболочки звезды во время взрыва составляет скорость света.

$P = \frac{E}{t}$ ← энергия взрыва; t ← время взрыва; P ← мощность взрыва

$P_1 = 32 P_2$

$\Rightarrow E_1 = 32 E_2$

По условию, радиус фронта меняется следующим образом:

$R(t) = \alpha E^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$

энергия взрыва

$\boxed{R_1(t)} = \alpha \cdot (32 E_2)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} = \alpha \cdot 2 \cdot E_2^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} = \boxed{2 R_2(t)}$

В первый раз фронты встретятся на линии, соединяющей центры сфер; т.к. линия, соед. центры сфер имеет длину, равную кратчайшему расстоянию между ними (центрами).

$\Rightarrow \boxed{R_1 + R_2 = 300 \text{ пк}}$

Решаем систему из двух ур-й.

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 300 \text{ пк} \\ R_1 = 2R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = 200 \text{ пк} \\ R_2 = 100 \text{ пк} \end{cases}$$

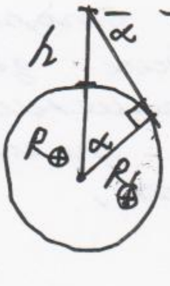
$R_1 = 200$ пк — расстояние от более мощной сверхновой до места встречи фронтов.

Ответ: 200 пк.

---

(5)

Продолжительность дня на Бурдж-Халифе больше, чем на уровне моря ввиду понижения горизонта α.



Найдём α.

$\boxed{\alpha} \approx \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{(R_\oplus + h)^2 - R_\oplus^2}}{R_\oplus + h} =$

(малый угол)

$= \dfrac{\sqrt{\cancel{R_\oplus^2} + 2R_\oplus h + h^2 - \cancel{R_\oplus^2}}}{R_\oplus + h} = \dfrac{\sqrt{2R_\oplus h + h^2}}{R_\oplus + h} \approx$

$\approx \boxed{\dfrac{\sqrt{2R_\oplus h}}{R_\oplus + h}}$

(h^2 очень мало)

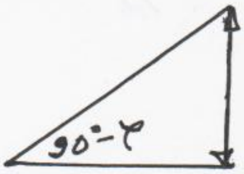
$R_\oplus = 6400$ км

$h = 0{,}442$ км

$\alpha = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 6400 \text{ км} \cdot 0{,}442 \text{ км}}}{6400 \text{ км} + 0{,}442 \text{ км}} = \dfrac{\sqrt{2838{,}8}}{6400{,}442} \approx$

$\approx \dfrac{53}{6400}$

Угол α довольно мал, поэтому можно использовать плоское приближение. Солнце, как и другие звёзды, движется по малому кругу вокруг полюса (правда, у него в течение года меняется склонение). Значит, восходит и заходит оно под углом $90°-\varphi$ (φ – широта) к горизонту.

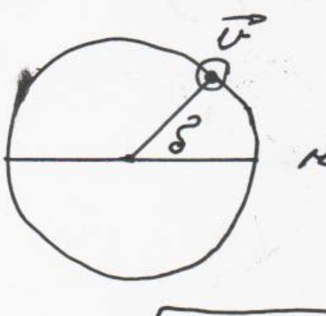


При заходе на небоскрёбе Солнце проходит ещё угол α (рефракцию и видимые размеры не учитываем).

Вопрос: <u>с какой скоростью?</u>

В день весеннего равноденствия (находясь на небесном экваторе) скорость Солнца составляет $15°/ч = v_{экв}$.

При определённом склонении



$$v = v_{экв} \cos\delta$$

$v = \min$ тогда, когда $\delta = \max$

$$\delta = \varepsilon_e = 23{,}4°$$

$$\boxed{v_{min} = v_{экв} \cdot \cos\varepsilon_e}$$

Мы определили скорость минимальную (разница в прод-ти дня тогда max; т.к. время захода max)

$$\boxed{t_{\substack{зах \\ max}}} = \frac{\frac{\alpha}{\sin(90°-\varphi)}}{v_{min}} = \frac{\alpha}{\cos\varphi \cdot v_{min}} = \frac{\alpha}{\cos\varphi \cdot (v_{экв} \cdot \cos\varepsilon_e)} =$$

$$= \boxed{\frac{\alpha}{v_{экв} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varepsilon_e}}$$

По условию, $\varphi = 25° \approx 23{,}4° = \varepsilon_e$

$\Rightarrow \cos\varphi \approx \cos\varepsilon_e$

А ещё φ и ε_e — углы до 30°

$\Rightarrow \varphi \approx \sin\varphi$

$\varepsilon_e \approx \cos\varphi$

$$\varepsilon_e \approx \varphi \approx \frac{25}{60} \approx \frac{5}{12}$$

[рад]

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{144-25}}{12} =$$

по осн. триг. тождеству

$$= \frac{\sqrt{119}}{12} \approx \frac{11}{12}$$

$$v_{экв} = 15°/ч \approx \frac{1}{4}\,\frac{рад}{ч}$$

Итого:

$$t_{зах\,max} = \frac{\frac{53}{6400}}{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^2} = \frac{53\cdot\cancel{4}\cdot\overset{9}{\cancel{144}}}{\underset{400}{\cancel{6400}}\cdot 121} \approx \frac{2{,}3\cdot 9}{100} = \frac{20{,}7}{100} = 0{,}207\ (ч)$$

$$\left(\frac{53}{121} \approx 2{,}3\right)$$

$$t_{зах} \approx 12{,}6\ мин \approx 13\ мин$$

т.к. $t_{восх} = t_{зах}$

в сумме удлиннение дня

$$2t_{зах} = 2\cdot 13 = 26\ мин$$

Заметим, что учёт рефракции и видимых размеров почти не повлиял бы на ответ в задаче, т.к. эти величины очень малы, и мы бы их „съели" при округлении:

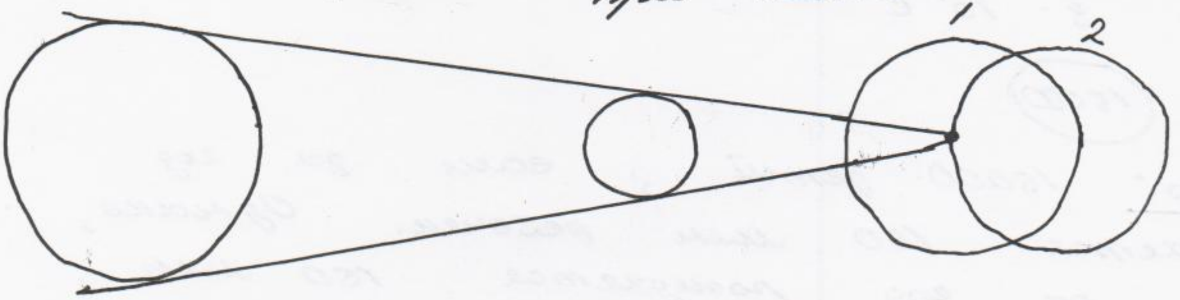
$\delta = 35' \approx 0{,}5°$ (у горизонта)

$\alpha \approx 0{,}25°$ (угл. радиус ☉)

Ответ: 26 мин.

3

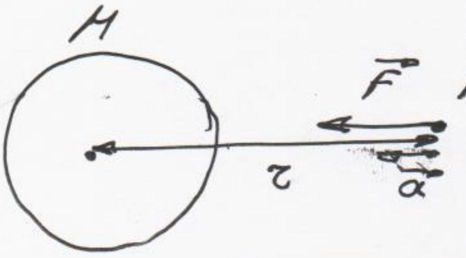
(1, 2 – возможные положения Земли при полном солн. затмении)



Задача сводится к оценке продолжительности одного затмения.

Мы знаем, что Луне надо пройти угловой диаметр Солнца, кот. примерно равен $0{,}5^\circ = \frac{1}{2}^\circ \approx \frac{1}{120}$ рад

Угловая скорость:



$$\frac{GMm}{r^2} = ma \quad (\text{II з. Н.})$$

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$

$M = 6 \cdot 10^{24}$ кг

$r = 400\,000$ км

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}\right)\left(6 \cdot 10^{24}\ кг\right)}{(400000000\ м)^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 6}{64} \cdot \frac{10^{-11} \cdot 10^{24}}{10^{24}}} = 10^{-5} \cdot \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 6}{64 \cdot 10}} \approx$$

$$\approx 10^{-5} \cdot \sqrt{\frac{20}{32 \cdot 10}} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-5}\ \left(\frac{рад}{с}\right)$$

Найдём продолжительность затмения.

$$t_з = \frac{\frac{1}{120}\ рад}{\frac{1}{4} \cdot 10^{-5}\ \frac{рад}{с}} = \frac{100000}{30} = \frac{10000}{3}\ (с)$$

За год рождается $16 \cdot 10^7$ детей

1 год $= 3 \cdot 10^7$ с

Решаем пропорцию:

$3 \cdot 10^7$ с — $16 \cdot 10^7$ детей

$\frac{10000}{3}$ с — x детей

$$x = \frac{\frac{10000}{3}\,c}{3 \cdot 10^7\,c} \cdot (16 \cdot 10^7) = \frac{10000}{9} \cdot 16 \approx \frac{10000}{10} \cdot 16 =$$

$$= 16000$$

Ответ: 16000 детей, если за год рождается 160 млн девочек. Однако, если за год рождается 160 млн именно людей, можно предположить, что мужчин и женщин на Земле примерно поровну, тогда ответ в 2 раза меньше — 8000 детей.

КОД: СПб-101