Задача 1

Мы знаем что период мат. маятника определяется по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{a}}$$, где $a \to$ ускорение груза на маятнике

на полюсе:

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \text{ где } g = \frac{GM}{R^2}$$

на экваторе:

$$T_e = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a_{cf}}}$$, где $a_{cf} \to$ центробежное уск. $a_{cf} = \omega^2 R$

$$\omega = \frac{2\pi}{P}, \text{ где } P = 10h$$

на полюсе, на 130 km

$$T_p' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}},\quad g' = \frac{GM}{(R+h)^2},\quad h = 130\,km$$

$$\Rightarrow T_p' = T_e = T_p(1+2\%) = T_p(1+\eta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g-a_{cf}}} = \frac{1}{\sqrt{g'}} = \frac{1}{\sqrt{g}}(1+\eta)$$

$$g' = g - a_{cf} \Rightarrow a_{cf} = GM\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2}\right) = GM\frac{2Rh+h^2}{R^2(R+h)^2} \approx GM\frac{2h}{R^3}$$

$$g'(1+\eta)^2 = g,\ \eta \ll 1 \Rightarrow g'(1+2\eta) \approx g \Rightarrow \frac{1+2\eta}{(R+h)^2} = \frac{1}{R^2}$$

$$\Rightarrow 1+2\eta = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 \to 1+\frac{h}{R} = \sqrt{1+2\eta} \approx 1+\eta$$

$$\Rightarrow R = \frac{h}{\eta} = 50h = 6500\,km$$

$$\omega^2 = GM\frac{2h}{R^4} \Rightarrow \frac{GM}{R} = \frac{\omega^2}{2h}\cdot R^3 = \frac{\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2\cdot h^2}{2\eta^3} = \left(\frac{h}{P}\right)^2\cdot\frac{2\pi^2}{\eta^3}$$

Макс. ск. по поверхности будет первая косм. ск. $V_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

(вращение не мешает, можем двигаться около полюсов)

$$\Rightarrow V_{max} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{h}{P} \cdot \sqrt{\frac{2\pi^2}{\eta^3}} = \frac{h\pi}{P}\sqrt{\frac{2}{\eta^3}} =$$

$$= \frac{h\pi}{P}\sqrt{2 \cdot 50^3} = \frac{h\pi}{P} \cdot 5^3 \cdot 2^2 = 500\pi \frac{h}{P} \approx \boxed{20000\, km/h} \approx 6\, km/s$$

Задача 2

У нас 3 случая на то какие будут сами звезды:

1) 2 синих гиганта и 2 красных карлика

2) 2 белых карлика и 2 красных гиганта
(цвет синий)

3) красный и белый карлик и красный и синий гигант

с условием на то чтобы у карликов и гигантов были одинаковые светимости в случаях 1 и 2 нет проблем (звезды чисто случайно могут быть одинаковыми) в случае 3 есть опасность на ошибку:

красный гигант должен будет быть намного больше синего (сверхгигант)
карлики можно проверить с характерными размерами.

$$L_1 = L_2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \approx \left(\frac{3\cdot10^4 K}{3\cdot10^5 K}\right)^2 \approx \frac{1}{100}$$, что вполне возможно (радиус белых карликов сравним с радиусом Земли)

то же самое нельзя сказать про гигантов,
у них относительная вариация в радиусах не на столько большая (даже у сверхгигантов)

1) и 2) | в обоих случаях система карликов старше
(1 случае это не обязательно, но чисто статистически, карлики живут дольше и скорее всего они старее.) (2 случае белые карлики закончили эволюцию). Возможно и чтобы системы были карлик-гигант, но тогда они вовсе одинаковы -> их возраст равен. Еще при формировании условия похожи и скорее всего обе звезды на одном этапе эволюции.

3) как мы уже сказали этот случай не очень вероятен, но если звезды такие, то системы скорее всего белый карлик - красный гигант и красный карлик - синий гигант. Звезды можно разделить так что никакой аккреции вещества нет. Система с белым карликом старше чем та с синим гигантом и красным карликом из соображений о эволюции звезд (синие гиганты не живут долго)

Задача 3

Чтобы у галактик не было фиолетового смещения в спектре нужно чтобы их скорость от разширения вселены была больше чем сумма их пекулярных скоростей и скоростей вращения.

$\Rightarrow V_H = Hz \geq V_p + V_{rot}$

$\Rightarrow z_{min} = \dfrac{V_p(max) + V_{rot}(max)}{H}$

$\Rightarrow \boxed{z_{min} = 17\,Mpc}$

$V_p(max) \approx 1000\,km/s$

$V_{rot}(max) \approx 210\,km/s$

$H = 70\,\dfrac{km/s}{Mpc}$

для уверености можно умножить всё на 2, так как Солнце и Млечный путь тоже двиутся. и так $\boxed{z_{min} = 35\,Mpc}$

Задача 4

$\lambda_0 = 6563 Å$ → лаб. длина волны $H\alpha$

так как у нас эффект Доплера: $V = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c$, где $\Delta\lambda = 0{,}46 Å$

V → круговая скорость одной из компонент → пусть это будет компонент A.

$V_A = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c = \frac{M_B}{M_A} \cdot V_B$; $V_A \approx 20 km/s$

⇒ в относительной орбите: $V = V_A + V_B = V_A\left(1 + \frac{M_A}{M_B}\right) = \sqrt{\frac{G(M_A+M_B)}{d}}$

d → расстояние м/у A и B. $\Rightarrow d = \frac{G(M_A+M_B)}{V^2}$

III закон Кеплера:

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G(M_A+M_B)}{4\pi^2} \rightarrow \frac{(G(M_A+M_B))^2}{T^2} = \frac{V^6}{4\pi^2}$$

$$G(M_A+M_B) = \frac{V^3 T}{2\pi} \Rightarrow (M_A+M_B) G = \frac{V_A^3 T}{2\pi} \cdot \frac{(M_A+M_B)^3}{M_B^3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi G}{V_A^3 T} = \frac{(M_A+M_B)^2}{M_B^3}$$, массы белых карликов $M_{БК} \in [0{,}5; 1{,}2 M_\odot]$

$$\rightarrow \frac{(M_A+M_B)^2}{M_B^3} \approx 3 \cdot 10^{-31} kg^{-1}, T = 5 ч$$

не светит в V, значит $T = 5 ч$

I] $T = 5 ч$ → второй компонент (сам) белый карлик ⇒ A – БК.

⇒ источник $H\alpha$ → белый карлик

$$\Rightarrow \frac{(M_{БК}+M_B)^2}{M_B^3} = 3 \cdot 10^{-31} kg^{-1}$$, возьмем крайние значения $M_{БК}$

$$\frac{(1 \cdot 10^{30} + M_B)^2}{M_B^3} = 3 \cdot 10^{-31} kg^{-1} \rightarrow 3M_B^3 = 10^{31} kg \cdot (10^{30} kg + M_B)^2$$

перейдем в $[10^{30} kg] \rightarrow 3M_B^3 = 10 \cdot (1 + M_B)^2$

$\Rightarrow M_B \approx 5 \cdot 10^{30} kg$

$M_{БК} = 1{,}2 \cdot M_\odot = 2{,}4 \cdot 10^{30}$ ⇒ аналог. $M_B \approx 6{,}5 \cdot 10^{30} kg$

⇒ объект $M \in [5 \cdot 10^{30} kg; 6{,}5 \cdot 10^{30} kg]$
не излучает в V и скорее всего черная дыра.

III

$T = 10$ ч $\to$ ~~перед~~ каждые 5 лет есть падение и оба объекта светят в V.

$$\Rightarrow \frac{(M_A + M_B)^2}{M_B^3} = 1{,}5 \cdot 10^{-31}\ kg^{-1}$$

1) $M_B \to M_{БК} \Rightarrow M_A = \sqrt{1{,}5 \cdot 10^{-31} kg^{-1} \cdot M_{БК}^3} - M_{БК}$

$M_{БК} = 0{,}5 M_\odot \to M_A = \sqrt{1{,}5 \cdot 10^{59} kg^2} - M_{БК} < 0 \to$ ~~ед~~ невозможно

$M_{БК} = 1{,}2 M_\odot \to M_A = \ldots$

2) $M_A \to M_{БК} \Rightarrow M_B$ по аналогичному способу находим как в I случае

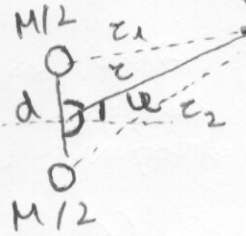
$$\frac{(M_{БК} + M_B)^2}{M_B^3} = 1{,}5 \cdot 10^{-31}\ kg^{-1}$$

$1{,}5 \cdot M_B^3 = 10(1 + M_B)^2$ (в мерных единицах 10^{30} kg)

Ответ: $M \in [5 \cdot 10^{30}$ kg; $6{,}5 \cdot 10^{30}$ kg$]$

Задача 5

Ситуация похожа на диполь из електростатики:



из теоремы косинусов:

$$r_1^2 = r^2+d^2-2\cdot\frac{dr}{2}\sin\varphi = r^2+d^2-dr\sin\varphi$$

$$r_2^2 = r^2+d^2+2\cdot\frac{dr}{2}\sin\varphi = r^2+d^2+dr\sin\varphi$$

пусть $r^2+d^2=A^2$

$$\Rightarrow V(r,\varphi) = \frac{GM}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{A^2-dr\sin\varphi}}+\frac{1}{\sqrt{A^2+dr\sin\varphi}}\right)=$$

$$=\frac{GM}{2}\,\frac{\sqrt{A^2+dr\sin\varphi}+\sqrt{A^2-dr\sin\varphi}}{\sqrt{A^4-(dr\sin\varphi)^2}} \approx \frac{GM}{r}\left(1-J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi-1}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2},\ x\ll 1\right)$$

очевидно $d\propto(R_\oplus, J_2)$

$$\frac{A\left(\sqrt{1+\frac{dr}{A^2}\sin\varphi}+\sqrt{1-\frac{dr}{A^2}\sin\varphi}\right)}{A^2\sqrt{1-\left(\frac{dr\sin\varphi}{A^2}\right)^2}} \approx \frac{1+\cancel{\frac{dr\sin\varphi}{2A^2}}+1-\cancel{\frac{dr\sin\varphi}{2A^2}}}{A\left(1-\underbrace{\frac{\left(\frac{dr\sin\varphi}{A^2}\right)^2}{2}}_{x}\right)}=$$

$$=\frac{2}{A(1-x)} \Rightarrow \frac{GM}{2}\cdot\frac{2}{A(1-x)} = \frac{GM}{r}\left(1-J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi-1}{2}\right)$$

$A\approx r$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1-J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi-1}{2}$$

$$x\ll 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x}\approx 1+x \Rightarrow 1+\frac{d^2r^2\sin^2\varphi}{2A^4} = 1-J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi-1}{2}$$

остается надеется что знак перед J_2 должен быть $+$, а не $-$, иначе будет бред.

$$\Rightarrow d^2\sin^2\varphi = J_2R_\oplus^2(3\sin^2\varphi-1)$$

самую хорошую оценку, которую могу дать это $\boxed{d=\sqrt{3J_2R_\oplus^2}\approx 350\text{ km}}$

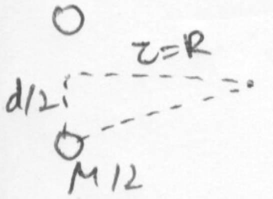
и по пути приближения, фактор „-1" пропал.

Можем проверить следущее:

если взять точку на экваторе $\to r=R_\oplus;\ \theta=0$

$$\Rightarrow V = \frac{GM}{R}\left(1 - J_2\cdot\frac{-1}{2}\right) = \frac{GM}{R}\left(1+\frac{J_2}{2}\right)$$

а если посчитать „по честному"



$$V_E = \frac{GM_\oplus}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+R^2}} < \frac{GM}{R} < \frac{GM}{R}\left(1+\frac{J_2}{2}\right) = V$$

~~злат~~ что-то не так. это наводит на мысли что формула по настоящему должна быть.

$$V(r,\theta) = \frac{GM}{r}\left(1 \boxed{\pm} J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\theta-1}{2}\right)$$

технически во всей задачи перед $\frac{GM}{r}$ должен стоять „−", такова природа грав. поля.

вернемся к экватору, если знак „+", то

$$\frac{1}{R\sqrt{1+\left(\frac{d}{2R}\right)^2}} = \frac{1}{R}\left(1-\frac{J_2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{1+\frac{d^2}{8R^2}} \approx 1-\frac{d^2}{8R^2} = 1-\frac{J_2}{2} \Rightarrow \boxed{d = 2R\sqrt{J_2} \approx 400\text{ км}}$$

, что немного дальше ранее полученного результата

$Z+1$ $\gamma\beta$

①

$$T_e = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a}} = \eta$$

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$a = \omega^2 R$$

$\frac{130}{10} = 13$ km/h

40.500 $\frac{20\,000 \text{ km/h}}{3600}$

3.6 $36.3 \cdot 10^5$

$$T_n' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{GM/(R+h)^2}} = T_e$$

$2 \cdot 10^4$

$$g - a = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

696000 6731

$$\omega^2 R = GM\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2}\right) = GM\frac{2Rh+h^2}{R^2(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2}\left(1-\frac{1}{\eta^2}\right)$$

$$\frac{\ell}{g-a} = \eta^2\frac{\ell}{g} \rightarrow g = \eta^2(g-a)$$

$$a = g\frac{\eta^2-1}{\eta^2} = g\left(1-\frac{1}{\eta^2}\right)$$

$$2Rh+h^2 = (R+h)^2\left(1-\frac{1}{\eta^2}\right)$$

$$1+x \quad \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} = 1+$$

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1+x}{1+x} = \frac{1+x}{1-x^2} \approx 1+x$$

6500

$$2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

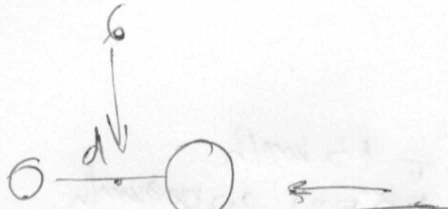
$$GM\frac{2Rh}{R^{3}} = \omega^2 R$$

$25 \cdot 4 \cdot 100$ 500 $50 = 25 \cdot 2$ $5^6\, 2^{3 \cdot 2}$

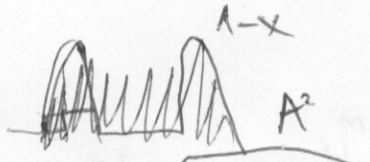
$$\omega^2 = 2GM\frac{h}{R^4}$$

$$1+2\eta = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 \rightarrow 1+\frac{h}{R} = \sqrt{1+2\eta} = 1+\eta$$

(2)



$$\frac{1}{1-x} =$$



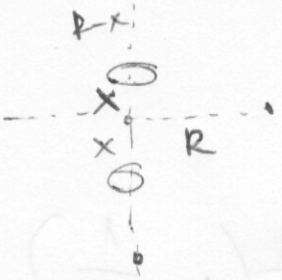
$$V = \sqrt{\frac{G(M_1+M_2)}{d}}$$

T

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G(M_1+M_2)}{4\pi^2}$$

$$z_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + z^2 - dz\sin\varphi$$

$$z_2^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + z^2 + dz\sin\varphi$$



$$\frac{GM}{z}\left(1 - J_2\left(\frac{R_\oplus}{z}\right)^2 \frac{3\sin^2\varphi - 1}{2}\right)$$

$$z = R_\oplus \quad \varphi = 0 \to \frac{GM_\oplus}{R}\left(1 + J_2 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$\varphi = 90° \to \frac{GM_\oplus}{R}\left(1 - J_2\right)$$

$$V_p = \frac{GM_\oplus}{2(R-x)} + \frac{GM_\oplus}{2(R+x)} =$$

$$= \frac{GM_\oplus(2(R+x)+2(R-x))}{4(R^2-x^2)} = \frac{GM_\oplus R}{R^2-x^2} = \frac{GM_\oplus}{R - \frac{x^2}{R}}$$

$$V_E = \frac{GM_\oplus}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$A \approx z$

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + z^2 - 2\frac{d}{2}\cdot z\cos(90° - \varphi) = z_1^2$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + z^2 - 2\frac{d}{2} z\cos(90° + \varphi) = z_2^2$$

$$V = \frac{GM_\oplus}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{A^2 - dz\sin\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{A^2 + dz\sin\varphi}}\right) =$$

$$= \frac{GM_\oplus}{2}\left(\frac{\sqrt{A^2 + dz\sin\varphi} + \sqrt{A^2 - dz\sin\varphi}}{\sqrt{A^4 - d^2z^2\sin^2\varphi}}\right)$$

$$\frac{\cancel{A^2} A\left(\sqrt{1 + \frac{dz\sin\varphi}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{dz\sin\varphi}{A^2}}\right)}{A^2\sqrt{1 - \left(\frac{dz\sin\varphi}{A^2}\right)^2}} =$$

$$V = \frac{GM_\oplus}{z} \cdot \frac{1}{1 - \text{-||-}} = \frac{1 + \cancel{\frac{dz\sin\varphi}{2A^2}} + 1 - \cancel{\frac{dz\sin\varphi}{2A^2}}}{A\left(1 - \frac{\left(\frac{dz\sin\varphi}{A}\right)^2}{2}\right)}$$

$$\frac{GM_\oplus}{z}\Big($$

$V = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c$

$\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot kg$ $\quad \frac{N \cdot m^2}{\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m^2}{kg}} = \frac{m^3}{s^2}$

$\frac{m^3}{s^2}$ $\quad \frac{13,8}{6,6} = 20$ $\quad 10^6 \cdot 160 \quad 1,6 \cdot 10^8$

$\frac{4,6 \cdot 300000}{6563} = 30 \cdot \frac{4,6}{6,6} = 20 km/s$ $\quad 400 \quad 20 \quad 4000,5$

$T = 5 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600$

6 $\quad 6,67 \cdot 10^{-11}$ $\quad \frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-8}}{1,6}$

$2,0 \cdot 10^7$

21 $\quad 3 \cdot 10^{-31}$

$2,0 \cdot 10^{54}$ $\quad 10^{-23}$

8 $\quad \frac{6^{12} \quad 6,63 \cdot 10^{-31}}{8 \cdot 2} \to 3$

2 $\quad 3^2 \to 90$

$3 \cdot 8^2 \quad 160$

3 $\quad 4$

$4^3 \cdot 3$

$64 \cdot 3 = 182$ $\quad 6 \quad 360$

$125 \cdot 3 = 375$

$1,5 \cdot 10^{59}$

10^{30} $\quad 90 - 31 = 59$

1,5