КАЗ-12

№1.

Для начала найдем экваториальный радиус планеты:

$$L = 60000\text{км} = 2\cdot\pi\cdot R_э$$

$$R_э = \frac{60000\text{км}}{2\cdot\pi} \sim 9500\text{км}$$

Далее, по условию сила тяжести на земном полюсе и на полюсе нашей планеты равны:

$$F_\oplus = F_п \qquad g = \frac{M\cdot G}{R^2}, \text{ где } \begin{array}{l} M\text{- масса тела} \\ R\text{- его радиус.} \end{array}$$

$$m g_\oplus = m g_п$$

$$g_\oplus = g_п$$

$$\frac{M_\oplus\cdot G}{R_\oplus^2} = \frac{M_п\cdot G}{R_п^2} \longrightarrow \frac{M_\oplus}{R_\oplus^2} = \frac{M_п}{R_п^2}$$

~~Их~~ Чтобы в дальнейшем решить задачу, нам необходимо знать массу планеты. Тут может быть 2 варианта:

1) планета сферическая $\to R_э = R_п$

2) планета эллипсоидная $\to R_э \neq R_п$

Во втором случае найти массу гораздо сложнее, ведь мы не знаем насколько экваториальный радиус отличается от полярного. Поэтому будем считать, что планета сферическая. Тогда:

$$M_п = \frac{M_\oplus\cdot R_п^2}{R_\oplus^2} = \qquad M_\oplus = 6\cdot10^{24} \quad R_п \approx 9500\text{км} \quad R_\oplus \approx 6400\text{км}$$

(на самом деле, если бы был калькулятор, мы должны были использовать более точные значения, например, полярный радиус $\oplus$: $R_{п\oplus} = 6356$км.)

$$= \frac{6\cdot10^{24}\cdot(9{,}5\cdot10^3)^2}{(6{,}4\cdot10^3)^2} = \frac{6\cdot10^{24}\cdot9{,}5^2}{6{,}4^2} = \frac{6\cdot90}{41}\cdot10^{24} = 13{,}2\cdot10^{24} = 1{,}3\cdot10^{25}\text{кг.}$$

Следующим шагом давайте найдем радиус орбиты спутника:

$T_л = T_c = 27{,}3$ сут (сидерический период Луны)

По 3 обобщенному закону Кеплера:

Лист № 1

$$\frac{T_1^2(M_1+m_1)}{T_2^2(M_2+m_2)}=\frac{a_1^3}{a_2^3}$$

КАЗ-12

Запишем его для нашей системы (массами Луны и спутника можем пренебречь, ведь они пренебрежимо малы относительно масс их центральных тел):

$$\frac{T_c^2\cdot M_п}{T_л^2\cdot M_\oplus}=\frac{a_c^3}{a_л^3} \qquad T_c=T_л \Rightarrow T_c^2=T_л^2$$

$$a_c=\sqrt[3]{\frac{M_п}{M_\oplus}\cdot a_л^3}=a_л\cdot\sqrt[3]{\frac{13\cdot10^{24}}{6\cdot10^{24}}}=a_л\cdot\sqrt[3]{\frac{13}{6}}\sim a_л\cdot\sqrt[3]{2}\sim 1{,}3\cdot a_л.$$

$a_л=384400$ км (в данной задаче эксцентриситет учитывать не будем)

$a_c=1{,}3\cdot384400\text{км}=500.000\text{км}=5\cdot10^5$ км

Далее найдем ~~[illegible]~~ размеры спутника:

так как на небе он должен выглядеть также, как Луна с Земли, угловой диаметр $d_c=0{,}5°$.

$d°=\frac{D}{r}\cdot57{,}3$ D – истинный диаметр, r – расстояние до тела

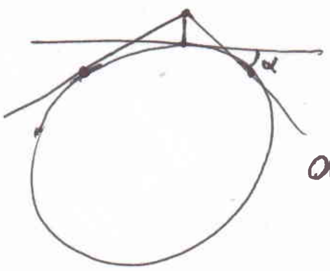
$$D=\frac{d\cdot r}{57{,}3}=\frac{0{,}5\cdot(500000-9500)}{57{,}3}\sim\frac{0{,}5\cdot500000\text{км}}{57{,}3}\sim4350\text{км}$$

Ответ: $a=5\cdot10^5$ км, $D=4350$ км

№5.

$h=442$ м.

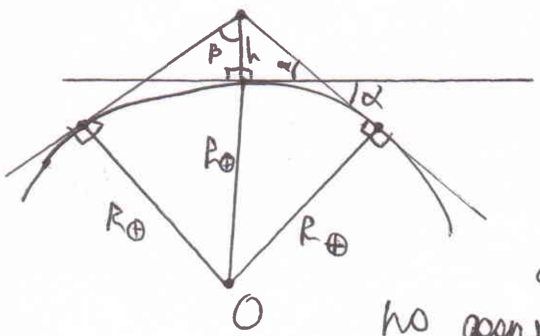
Очевидно, продолжительность светлого времени суток на высоте h над Землей и на ее поверхности будут различатся (причем на высоте h она будет больше)



физический горизонт на какой либо высоте опускается вниз. Найдем это опущение при $h=442$м. (нужно найти $\angle\alpha$)

КАЗ-12

$$\sin\beta = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = \frac{6371\text{км}}{6371\text{км} + 0{,}45\text{км}}$$



что очень близко к 1, то есть $\angle\beta$ очень близок к 90°

заметим, что $\beta = 90 - \alpha$

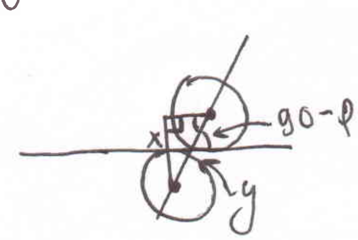
$\alpha = 90 - \beta$

по формуле приведения: $\sin 90 - \alpha = \cos\alpha$

$\sin\beta = \cos\alpha$.

угол α ~~очен~~ довольно мал. На самом деле, решить данную задачу без калькулятора и получить нормальный ответ (с допустимой погрешностью хотя бы 20%) почти нереально, ведь находить синус числа, близкого к единице вручную, и при этом получить ответ не 90° невозможно (если ты не какой-нибудь вундеркинд, считающий все на пальцах). ~~Поэтому, так как $\angle\alpha$ получается дово очень малым, пр~~

Рефракция у горизонта составляет 35'. Угловой диаметр Солнца ~~Бла~~ ~30'. Посчитаем сколько будет длиться заход/восход на $\varphi = 25^\circ$.



Сторона $x = 2 \cdot R_\odot = D_\odot = 30'$

нужно найти сторону y:

$$\frac{\sin x}{\sin 90 - \varphi} = \frac{\sin y}{\sin 90} = \sin y.$$

$$y = \arcsin\left(\frac{\sin 0{,}5}{\sin 65^\circ}\right)$$

$\left.\begin{array}{l}\sin 65 \approx \sin 60 \sim \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 0{,}5 \text{ близок к } 0.\end{array}\right\} \Rightarrow$ $\sin y$ очень мал, y соответственно тоже.

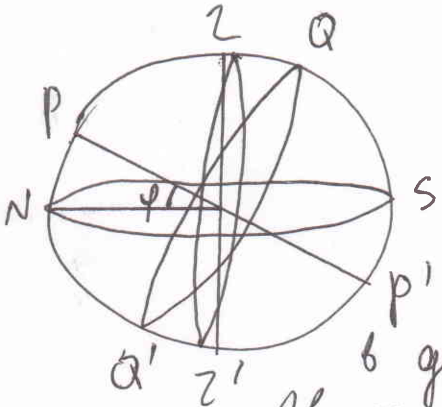
На самом деле солнце в течении года двигается неравномерно (по эклиптике)

$h_{вк} = 90^\circ - |\varphi - \delta|$

$h_{нк} = |\varphi + \delta| - 90^\circ$

Лист № 3

КАЗ-12



Можно также заметить, что φ очень близка к Тропикам ($23°26' \approx 23{,}43°$). Но все же солнце никогда не бывает в зените на данной широте. По экватору солнце движется в дни равноденствий (♈ 23.03 и ♎ 22.09). А в день летнего СС (22.06) ☉ максимально близко к зениту (отстоит от него лишь на $1{,}5°$, стоит отметить, что мы говорим про центр солнца, а не его край).

~~Поскольку в задаче требуется оценить, то х возможная разница составляет ~10 мин (5 мин раньше восход и на 5 мин позже закат).~~ См. продолжение на стр. 9-11.

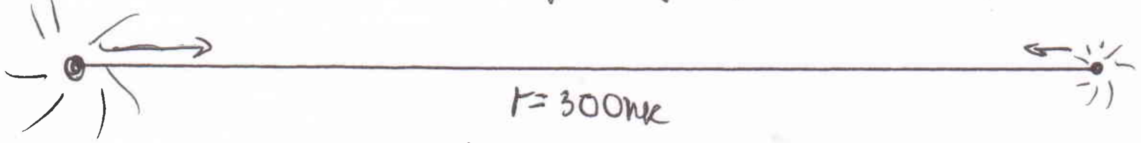
~~Ответ: ~10 мин.~~

№4.

$R(t) \propto E^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$

$E_1 = 32 \cdot E_2$

$t_1 = t_2$ (так как они вспыхнули одновременно)



$R_1 + R_2 = r$ (в момент встречи фронтов)

$R_1 = 300пк - R_2$

$$\frac{R_1}{R_2} \propto \frac{E_1^{\frac{1}{5}} \cdot \cancel{t_1^{\frac{2}{5}}}}{E_2^{\frac{1}{5}} \cdot \cancel{t_2^{\frac{2}{5}}}}$$

$$\frac{R_1}{R_2} \propto \frac{32^{\frac{1}{5}} \cdot \cancel{E_2^{\frac{1}{5}}}}{\cancel{E_2^{\frac{1}{5}}}}$$

$32^{\frac{1}{5}} = 2 = \sqrt[5]{32} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} \propto 2$

Чтобы найти ответ на задачу, нужно найти R_1 (радиус более мощного фронта на момент встречи)

$\begin{cases} R_1+R_2=300\text{ пк} \\ R_1=2\cdot R_2 \end{cases}$ $3R_2=300$ пк

$R_2=100$ пк

$R_1=200$ пк

Ответ: фронты встретятся на расстоянии 200 пк от более мощной Сверхновой.

№3.

~~Чтобы найти ответ на задачу, нужно найти максимально возможную продолжительность солнечного затмения. Такое происходит, когда Солнце имеет минимально возможные размеры на небе (т.е. ⊕ в афелии), а Луна максимально возможные (т.е. она в перигее)~~

~~$e_⊕=0,017$ $r_{аф}=a(1+e)$~~

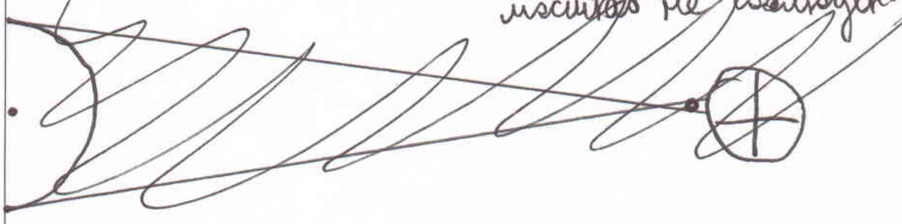
~~$e_Л=0,055$~~

~~$r_{аф}=a\cdot1,017=1ае\cdot1,017=1,017$ ае (расстояние от ☉ до ⊕)~~

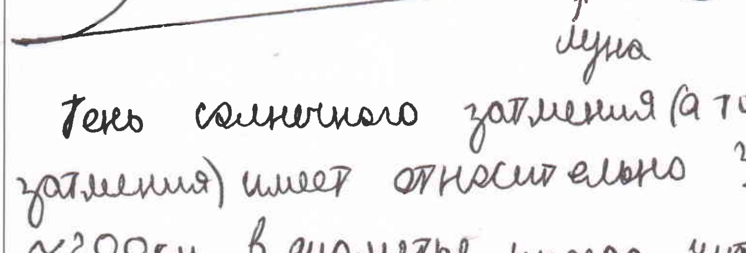
~~$r_Л=a\cdot(1-e)=a(1-0,055)=384400\cdot0,945\approx370000$ км~~

В задаче сказано, что проклятие работает, если ПСЗ видно хотя бы где-то на Земле. Нужно найти его длительность.

~~масштаб не соблюден~~



масштаб не соблюден



Луна

Тень солнечного затмения (а точнее Луны во время данного затмения) имеет относительно Земли малые размеры. ~200 км в диаметре, иногда чуть больше/меньше.

max значение ~270км

При этом, из-за вращения ⊕ вокруг своей оси, и из-за движения Луны по своей орбите (движение ⊕ вокруг ☉ тоже по сути влияет на это, но в данных масштабах оно пренебрежимо мало), тень движется по земной поверхности, образовывая „полоску" шириной ~200км. Если бы мы стояли в одном пункте, max продолжительность полной ~~фазы~~ фазы СЗ длилась бы ~7мин.

Найдем скорость тени по земной поверхности:
⊕ и Луна ~~по~~ движутся в одну сторону, против ЧС. То есть их скорости мы должны не суммировать, а вычитать.

$$V_{\oplus} = \frac{2\pi R_{\oplus}}{T_{\oplus}} \approx \frac{2\cdot\pi\cdot 6400\text{км}}{24ч\cdot 3600} \approx 0{,}5\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$$

$$V_{Л} = \frac{2\cdot\pi\cdot R_{Л}}{T_{Л}} \approx \frac{2\pi\cdot 384400\text{км}}{29{,}5\text{сут}\cdot 24\cdot 3600} \approx 1\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$$

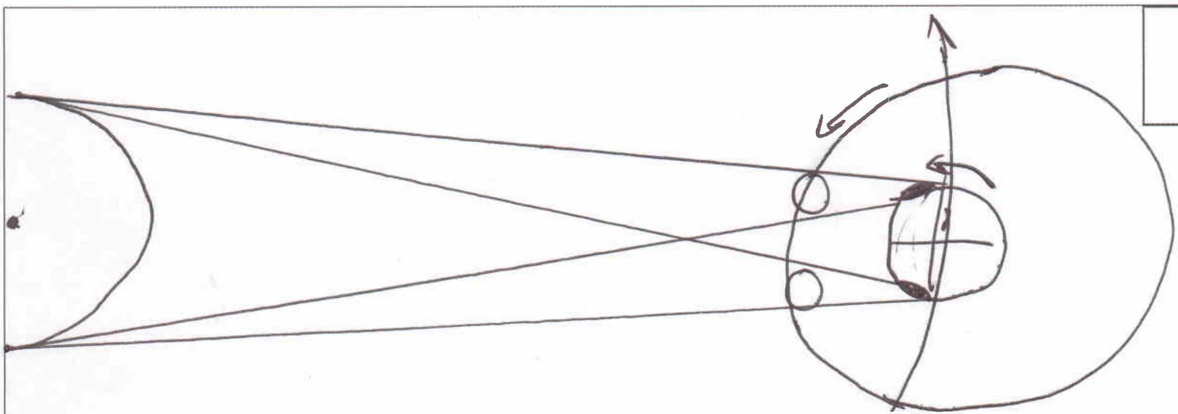
мы используем синодический период, так как на движение Луны также влияет движение ⊕ вокруг ☉

Скорость тени:

$$V_T = V_Л - V_{\oplus} = 1\,\frac{\text{км}}{\text{с}} - 0{,}5\,\frac{\text{км}}{\text{с}} = 0{,}5\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Далее нужно найти, сколько времени тень будет проходить по поверхности Земли. Заметим, что для подсчета следует брать не длину полуокружности экватора, а просто диаметр Земли. ~~Вед~~ Ведь тень движется не вокруг всей Земли, а только с дневной ее стороны

КАЗ-12



(в задаче считаем, что орбита Земли и Луны круговые)

$t = \frac{S}{v} = \frac{2\cdot 6371\,км}{0,5\,\frac{км}{с}} = \frac{4\cdot 6400\,км}{3600\,с} = 7\,ч$

За год рождаются 160 млн детей, из них 80 млн девочки.
Посчитаем сколько девочек рождаются за 1ч:

$\cancel{\frac{1,6\cdot 10^8}{365,2422\cdot 24} \approx \frac{16000\cdot 10^4}{8770} \approx 0,8\cdot 10^4}$

~~а за 7ч:~~

$\cancel{7\cdot 1,8\cdot 10^4 = 126}$

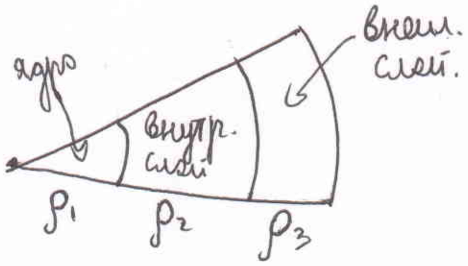
$\frac{8\cdot 10^7}{365,2422\cdot 24} \approx \frac{8000\cdot 10^4}{8770} \approx 1\cdot 10^4 = 10\,тыс$ детей (девочек)/ч

А за 7ч:

$7\cdot 10000 = 70000$ девочек

Ответ: под проклятие могут попасть ≈ 70тыс девочек за 1 затмение.

№2.



КАЗ-12

$\rho_0 = 1530 \frac{кг}{м^3} = \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} = \frac{M_0}{V_0}$

$\rho_1 = ?$

$\rho_2 = 3000 \frac{кг}{м^3} = \frac{M_2}{V_2}$

$\rho_3 = 600 \frac{кг}{м^3} = \frac{M_3}{V_3}$

$M_1 + M_2 + M_3 = M_0$

$V_1 + V_2 + V_3 = V_0$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1530 \frac{кг}{м^3} = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{V_1 + V_2 + V_3} \\ 3000 \frac{кг}{м^3} = \frac{M_2}{V_2} \\ 600 \frac{кг}{м^3} = \frac{M_3}{V_3}. \end{cases}$$

$R_1 = 0{,}3 R_0$

$V_1 = V_0 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}027 V_0$

$V_2 = V_0 - 0{,}027 V_0 - 0{,}657 V_0 = 0{,}326 V_0$

$V_3 = V_0 - 0{,}7^3 V_0 = 0{,}657 \cdot V_0$

$(R_3 = R_0 - 0{,}7 R_0)$

$\rho_1 = \frac{M_1}{V_1} = \frac{M_0 - M_2 - M_3}{0{,}027 V_0}$

Чтобы решить задачу, нужно массы разных слоев выразить через массу всей планеты.

$M = \rho \cdot V$

$$\left.\begin{matrix} M_0 = 1530 \cdot V_0 \\ M_3 = 600 \cdot 0{,}657 \cdot V_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{M_0}{M_3} = \frac{1530}{600 \cdot 0{,}657} \sim 4$$

$M_3 = 0{,}25 M_0.$

Аналогично с M_2:

$$\left.\begin{matrix} M_0 = 1530 \cdot V_0 \\ M_2 = 3000 \cdot 0{,}326 \cdot V_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{M_0}{M_2} = \frac{1530}{3000 \cdot 0{,}326} \approx 1{,}5$$

$M_2 = \frac{M_0}{1{,}5}$

$$\rho_1 = \frac{M_0 - M_2 - M_3}{0{,}027 \cdot V_0} = \frac{M_0 - 0{,}25M_0 - \frac{1}{1{,}5}M_0}{0{,}027\,V_0} =$$

$$= \frac{M_0}{V_0}\frac{(1-0{,}25-0{,}7)}{0{,}027} = \frac{1530\,\frac{кг}{м^3}\cdot 0{,}05}{0{,}027} = 2830\,\frac{кг}{м^3}$$

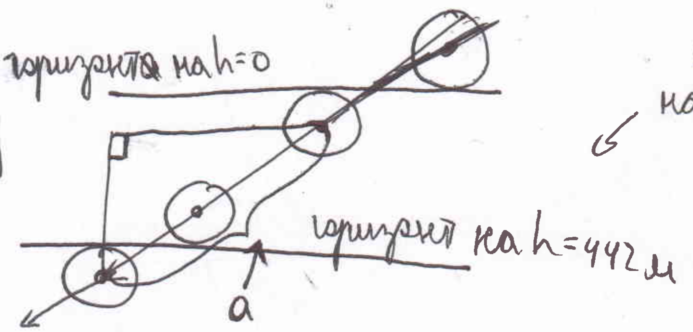
$\rho_0 = 1530\,\frac{кг}{м^3}$

Ответ: $\rho_{ядра} = 2830\,\frac{кг}{м^3}$

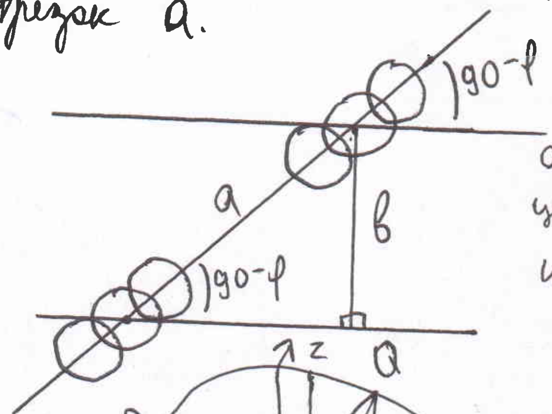
Стоит отметить, что данная плотность ниже плотности внутреннего слоя, что немного странно, но все же видимо это верный ответ.

№5 (продолжение).

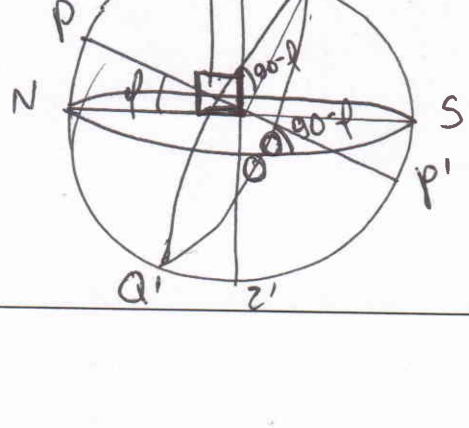
рис. 1



Различие составляет ~~длину~~ времени, за которое солнце пройдет отрезок a.



на самом деле нет разницы откуда считать: от центра до центра заходящего солнца, или от его же центра, но когда он пересекает горизонт.



Он все ★ движутся паралельно неб. экватору (суточное движение) против ЧС

Причем время, которое мы найдем, мы должны будем еще домножить на 2, так как ~~самая~~ день удлиняется и на восходе и на заходе

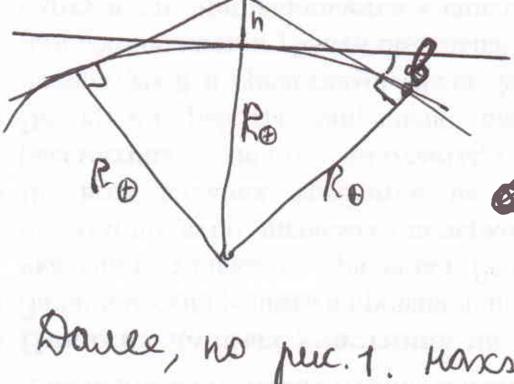
Чтобы найти это время, мы должны найти скорость ⊙ и расстояние, которое должно пройти ⊙.

Скорость:

за одни сутки ⊙ проходит 360°, т.е ⊙ проворачивается.

$V=\frac{360°}{24ч}=15°/ч$

Расстояние находится через тригонометрию: (*)



Это было рассказано в первой части (и у нас получилось

$\beta=90-\arcsin\left(\frac{6371км}{6371км+0,4[illegible]км}\right)$)

Далее, по рис. 1. находим расстояние, которое должно пройти ⊙:

по теореме синусов:

$\frac{\sin\beta}{\sin 90-\varphi}=\frac{\sin a}{\sin 90}=\sin a$

$a=\arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\sin 65}\right)$

В итоге, искомое t равно:

$t=2\cdot\frac{a}{V}=2\cdot\frac{a}{15°/ч}$

Так как a без калькулятора ~~невозможно~~ очень сложно,

КАЗ-12

~~оставим~~

оставим наш ответ в буквенном виде.
На самом деле опущение горизонта на высоте 442м будет небольшим, поэтому разница времен будет составлять не более 8-10 мин в сумме.

Ответ: ~9 мин.

Лист №11