CTE-05

№1

Дано

$h = 130$ км

$T_э = 1{,}02\,T_п$

$T_э = T_п'$

$T = 10$ ч

$v_{max} - ?$

Решение:

Планета имеет форму шара, значит $R = const$.
Разные периоды колебаний мат. маятника из-за того, что на экваторе есть центробежное ускорение $a = \omega^2 R$, вызванное вращением ~~Земли~~, а на полюсе его нет.
Максимальная скорость $v_{max} \le v_I$, где v_I – первая космическая скорость, т.е. скорость при которой тело начинает двигаться по круговой орбите, становясь спутником.
Значит нам нужно найти первую космическую скорость v_I для данной планеты.

$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$; нужно найти R (радиус планеты) и M (массу)

$\boxed{v_{max} = v_I}$

Период мат. маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где $g = \frac{GM}{R^2}$

Период на экваторе $T_э = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$; на полюсе $= T_п = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; на высоте h на полюсе $T_п' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$

$T_э = 1{,}02\,T_п$; $T_э = T_п' \Rightarrow 1{,}02\,T_п = T_п' \Rightarrow 1{,}02 \cdot \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}} = \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g'}}$;

$1{,}02\sqrt{\frac{g'}{g}} = 1$;

$1{,}02\sqrt{\frac{GM}{(R+h)^2} \cdot \frac{R^2}{GM}} = 1$;

$1{,}02\sqrt{\frac{R^2}{(R+h)^2}} = 1$;

$1{,}02\,\frac{R}{R+h} = 1$;

$1{,}02 = \frac{R+h}{R}$;

$1{,}02 = 1 + \frac{h}{R}$;

$1{,}02 - 1 = \frac{h}{R} \Rightarrow R = \frac{h}{1{,}02-1} = \frac{130}{0{,}02} = 6500\text{ км} = R$

$$\begin{array}{r|l} 13000 & 2 \\ -12 & 6500 \\ 10 & \\ -10 & \\ 0 & \\ 7 & \\ 49 & \\ \times 81 & \\ 49 & \\ +392 & \\ 3969 & \end{array}$$

$T_э = 1{,}02\,T_п \Rightarrow \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g-a}} = 1{,}02 \cdot \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}}$;

$\sqrt{\frac{l}{g-a} \cdot \frac{g}{l}} = 1{,}02$;

$\frac{g}{g-a} = 1{,}02$;

$\frac{GM}{R^2} = g$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\dfrac{\frac{GM}{R^2}}{\frac{GM}{R^2} - \omega^2 R} = 1{,}02$;

$\dfrac{\frac{GM}{R^2}}{\frac{GM - \omega^2 R^3}{R^2}} = 1{,}02$

$\frac{GM}{GM - \omega^2 R^3} = 1{,}02$;

$GM = 1{,}02(GM - \omega^2 R^3)$;

$1{,}02\,GM - GM = 1{,}02\,\omega^2 R^3$;

$0{,}02\,GM = 1{,}02\,\omega^2 R^3$

$M = \frac{1{,}02\,\omega^2 \cdot R^3}{0{,}02 \cdot G}$

$M = 51 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 6500^3 \cdot 10^9}{(10 \cdot 3600)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} =$

$= 51 \cdot \frac{36 \cdot 6500^3 \cdot 10^9}{36000^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} \approx$

$M \approx 51 \cdot \frac{36 \cdot 65^3 \cdot 100^3 \cdot 10^9}{36^2 \cdot 1000^2 \cdot 7 \cdot 10^{-11}} \approx$

$\approx 51 \cdot \frac{65^3 \cdot 10^9}{36 \cdot 7 \cdot 10^{-11}} \approx 4000 \cdot 10^{21} \approx$

$\approx M = 4 \cdot 10^{24}$ кг

$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{24} \cdot 4}{6500000}} =$

$= \sqrt{\frac{\cancel{6{,}5} \cdot 10^{-11} \cdot 10^{24} \cdot 4}{\cancel{6{,}5} \cdot 10^6}} =$

$= 2\sqrt{\frac{10^{13}}{10^6}} \approx 2000\sqrt{10} \approx$

≈ 6000 м/с или 6 км/с

$v_I = v_{max} = 6$ км/с

Ответ $v_{max} \approx 6$ км/с

№2

Дано:
2× Красные
2× Голубые
$L_1 = L_2$
$L_3 = L_4$

определить пары звёзд и какая пара старше.

Решение:

Мы знаем, что голубые звёзды это гиганты и сверхгиганты класса O-B, горячие и относительно молодые с небольшой продолжительностью жизни.

Красные звёзды могут быть как и гигантами, так и карликами (класс M). Они холодные по сравнению с голубыми звёздами.

Исходя из того, что голубые звёзды карликами быть не могут, делаем вывод, что гиганты – это голубые звёзды, а карлики – красные звёзды в нашем случае.

Получается два варианта пары:

	I вариант		II вариант	
1 пара	Г	К	К	К
2 пара	Г	К	Г	Г

где Г – голубая звезда, К – красная звезда

Красный карлик – это старые звёзды, которые уже должны сойти с главной последовательности.

Голубые гиганты – это молодые звёзды.

В двойной системе звезд с большей вероятность возраст звезд совпадает, значит Красный карлик и Голубой гигант не могут быть вместе, если только одна звезда не пролетала мимо другой и зацепила её, что мало вероятно.

К тому же светимости двух гигантов, как и двух карликов, совпадают, что говорит о том что возраст двух гигантов одинаковый, как и двух карликов.

Поэтому мы наблюдаем две системы двойных звёзд, в одной из которых два красных карлика, в другой систем два голубых гиганта.

Вариант II верен. За счёт большой светимости мы можем наблюдать их в телескоп. Двойные системы из красных карликов старше, т.к. мы знаем что это старые звёзды с большей жизнью, чем у голубых звёзд.

Ответ. 1 пара: Кр. карлик и Кр. карлик (старше); 2: Голуб. гигант и Г. гигант (моложе).

Формула Доплера №3

Смещение $\boxed{z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}}$; если z с "+", то это красное смещение и галактика или звезда от нас отдаляется. Если z "−", то это синее или фиолетовое смещение и значит галактика к нам приближается.

Также $z = \frac{v_r}{c}$, где v_r – лучевая скорость, c – скорость света

Закон Хаббла гласит, что вселенная расширяется и далекие небесные объекты отдаляются от нас со скоростью v;

$\boxed{v = HR = (zc)}$, где H – постоянная Хаббла; $H \approx 80 \frac{км/с}{Мпк}$
R – расстояние до объекта в Мпк

Чтобы не наблюдалось фиолетовое смещение в спектре, вызванное приближением галактики к нам, нужно чтобы красное смещение, вызванное расширением Вселенной, компенсировало фиолетовое смещение.

Чтобы оценить минимальное расстояние, когда не будет наблюдаться фиолетовое смещение; возьмём среднюю лучевую скорость $v_{ср} = -100$ км/с;
"−" – приближается к нам.

Следовательно, $HR + v_{ср} = 0$

$$R = -\frac{v}{H} \Rightarrow R = -\frac{-100}{80} = \frac{10}{8} = 1{,}25 \text{ Мпк}$$

Для реального примера возьмём Галактику Андромеду, ближайшую к нам. Лучевая скорость Андромеды $v_A \approx -300$ км/с.

$$R_A = -\frac{v_A}{H} = -\frac{-300}{80} = \frac{30}{8} = 3{,}75 \text{ Мпк}.$$

Для нахождения минимального расстояния примем лучевую скорость −160 км/с, тогда

$$R = -\frac{-160}{80} = 2 \text{ МПк}$$

$$R_{min} = 2 \text{ МПк}$$

Ответ. $R_{min} = 2$ МПк

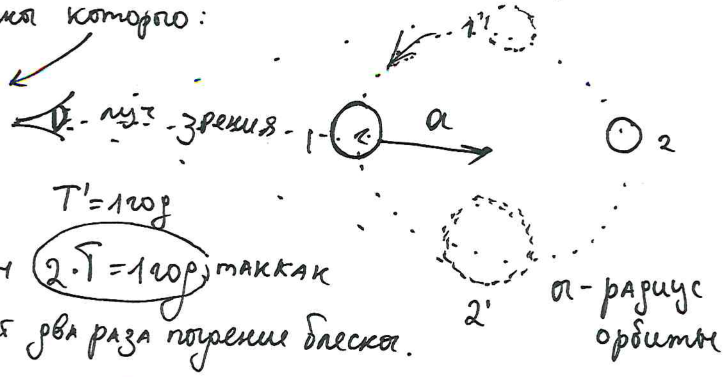
№4

Дано:
$A' = 0{,}46\,\text{Å}$
$\lambda = 650$ нм
$T = 0{,}5$ лет

$(m+M)$ – ?
M – ?

Решение:

Двойная система состоит из затменно-переменных звёзд, примерный график блеска которого:



$T' = 1$ год

Период системы равен $2 \cdot T = 1$ год, так как за один период происходит два раза падение блеска.

линии H_α расходятся с $A' = 0{,}46\,\text{Å}$, это значит что звезда то к нам приближается, то отдаляется, тем самым изменяя длину волн.

по формуле Доплера: $\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = z}$; где $\Delta\lambda = A$, где A – амплитуда
$A = 2 \cdot A' = 0{,}92\,\text{Å}$

Из з-на Хаббла: $HR = \boxed{cz = v} \Rightarrow v = 3\cdot10^8 \cdot \frac{0{,}92\,\text{Å}}{6500\,\text{Å}} = 3\cdot10^8 \cdot \frac{1}{65}\cdot\frac{1}{10^2} \approx 45$ км/с

Т.к. орбита круговая $T' = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi a}{v} \Rightarrow a = \frac{T' \cdot v}{2\pi} = \frac{45\cdot10^3 \cdot 365{,}25\cdot24\cdot3600}{6} =$
$= \frac{45\cdot10^3\cdot360\cdot24\cdot600}{1} = 2\cdot10^{11}$ м.

1 а.ед $= 1{,}5\cdot10^{11}$ м $\Rightarrow a = 1{,}3$ а.ед.

Используем третий уточненный з-н Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}\cdot\frac{(M_1+m_1)}{(M_2+m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \Rightarrow \frac{T'^2}{T_\oplus^2}\cdot\frac{(M+m)}{M_\odot} = \frac{a^3}{a_\oplus^3},$$

где $T_\oplus$ и $M_\odot$ – период Земли вокруг Солнца и масса Солнца.
$a_\oplus$ – радиус орбиты Земли.
$(M+m)$ – суммарная масса искомой системы

$$\frac{1^2}{1^2}\cdot\frac{(M+m)}{M_\odot} = \frac{1{,}3^3}{1^3} \Rightarrow M+m = \frac{1{,}3^3 \cdot M_\odot}{1}$$

$M + m \approx 2{,}2 M_\odot$

$$\begin{array}{r} 1{,}3 \\ \times\, 1{,}3 \\ \hline 39 \\ +\,13 \\ \hline 1{,}69 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}69 \\ \times\, 1{,}3 \\ \hline 507 \\ +\,169 \\ \hline 2{,}197 \end{array}$$

Известно, что масса белого карлика m от $\approx 0{,}2 M_\odot - 0{,}8 M_\odot$

Поэтому масса звезды-компаньона белого карлика от $(2{,}2M_\odot - 0{,}2M_\odot)$ до $(2{,}2M_\odot - 0{,}8M_\odot)$

Поэтому M находится в пределе от $2M_\odot$ до $1{,}4M_\odot$

Ответ. $M \approx$ ~~2M⊙ до~~ от $1{,}4M_\odot$ до $2M_\odot$

№5

$M_\oplus = 6\cdot 10^{24}$ кг

$R_\oplus = 6371$ км

$J_2 = 1{,}08\cdot 10^{-3}$

$R - ?$

Потенциал точечного источника $U = -\frac{GM}{R'}$, но т.к. Земля у нас сплюснута, то она описывается формулой:

$$\boxed{V(\varphi, r) = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\cdot\frac{3\sin^2\varphi - 1}{2}\right)}$$

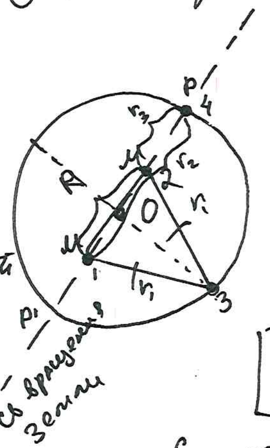
, где r – расстояния от центра Земли "O" до точки, φ – широта.

Модель двух негравитирующих масс:

O – центр Земли

1 и 2 – негравит. массы.

Т.к. они одинаковой массы, то они находятся на одном расстоянии от центра Земли



$M = \frac{M_\oplus}{2}$

На полюсе широта равна 90° или −90°, поэтому при $\varphi = 90°$

$$V(90°, r) = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\right)$$

На экваторе, где $\varphi = 0°$

$$\boxed{V(0°, r) = \frac{GM_\oplus}{r}}$$

~~Сумма потенциалов 1 и 2 равна потенциалу в т.3 Земли в т.3.~~

$$\cancel{2\cdot V_1 = V_{Земли}}$$

$$\cancel{2\cdot\frac{GM}{r_1} = \frac{GM_\oplus}{R_{\oplus э}}}$$

$$\cancel{\frac{GM_\oplus}{r_1} = \frac{GM_\oplus}{R_{\oplus э}} \Rightarrow r_1}$$

Из рисунка видно, что треугольник, $\Delta 123$ – равнобедренный

№5

Дано:
$M_\oplus = 6\cdot 10^{24}$ кг
$R_\oplus = 6400$ км
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{Н м^2}{кг^2}$
$J_2 = 1{,}08\cdot 10^{-3}$

R – ?

Решение

потенциал точечного источника: $\boxed{U = -\frac{GM}{r}}$, но

т.к. Земля у нас не шарообразной с $R = const$, а сплюснутой формы, то она описывается формулой в третьем приближении, т.е. в более точной:

$$\boxed{V(r,\varphi) = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\frac{3\sin^2\varphi - 1}{2}\right)},$$ где

r – расстояние от центра Земли до данной точки. V – потенциал

φ – широта.

Нарисуем примерную модель двух неграв. масс с $M = \frac{M_\oplus}{2}$ вдоль оси вращения Земли.

O – центр Земли

1 и 2 – неграв. масс