Задача №5

Изобразим ~~систему~~ модель, которая моделировала потенциал у советских инженеров (рис. 1).

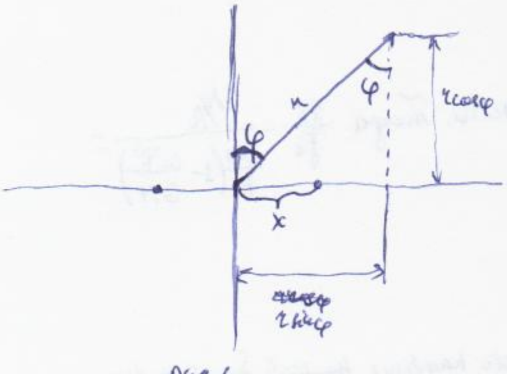

рис. 1

Тогда потенциал этой системы будет следующим:

$$V_{USSR} = \frac{GM_\oplus/2}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi - x)^2}} + \frac{GM_\oplus/2}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi + x)^2}} =$$

$$= \frac{GM_\oplus}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx\sin\varphi + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2rx\sin\varphi + x^2}}\right) =$$

$$= \frac{GM_\oplus}{2r}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2x}{r}\sin\varphi + x^2/r^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2}}}\right)$$

Заметим, что член $\frac{x}{r}$ очень мал, так как форма Земли очень близка к шару, а её потенциал, в общем, неплохо моделируется и одной массой, равной массе Земли.

Однако видно, что если разложить ~~$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ в ряд~~ $\frac{1}{\sqrt{1+\chi}}$, где $\chi = \pm\frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2}$ в ряд до первого порядка, то член с $\sin\varphi$ исчезнет, чего нам не нужно. Но разложить можно и дальше, т.к. $\frac{1}{\sqrt{1+\chi}} = (1+\chi)^{-1/2} =$

$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\chi + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\chi^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}\chi^3 + \ldots$. Видно, что достаточно будет ограничиться χ^2.

Тогда $\frac{1}{\sqrt{1-\chi}} \approx 1 - \frac{1}{2}\chi + \frac{3}{8}\chi^2$ и $V_{USSR} = \frac{GM_\oplus}{2r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2}\right) + \right.$

$\left. + \frac{3}{8}\left(-\frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2}\right)^2\right) = \frac{GM_\oplus}{2r}\left(1 - \cancel{\frac{x}{r}\sin\varphi} - \frac{x^2}{2r^2} + 1 + \cancel{\frac{x}{r}\sin\varphi} - \frac{x^2}{2r^2} + \cancel{\frac{3}{8}\left(\frac{2x}{r}\sin\varphi + \frac{x^2}{r^2} + \frac{2x}{r}\sin\varphi - \frac{x^2}{r^2}\right)\left(\frac{2x}{r}\right)}\right.$

$\left. + \frac{3}{8}\left(\frac{4x^2}{r^2}\sin^2\varphi + \cancel{\frac{4x^3}{r^3}\sin\varphi} + \frac{x^4}{r^4} + \frac{4x^2}{r^2}\sin^2\varphi - \cancel{\frac{4x^3}{r^3}\sin\varphi} + \frac{x^4}{r^4}\right)\right) = \frac{GM_\oplus}{2r}\left(2 - \frac{x^2}{r^2} + \frac{3x^2}{r^2}\sin^2\varphi + \frac{3}{4}\cdot\frac{x^4}{r^4}\right).$

Очевидно, что $\frac{x^4}{r^4}$ очень мал. Тогда ~~мы~~ можно сказать, что $V_{USSR} = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\cdot\frac{3\sin^2\varphi - 1}{2}\right)$

Тогда видно, что $\frac{J}{2}R_\oplus^2 = x^2$ и $x = \sqrt{J}\,R_\oplus = \sqrt{10{,}8\cdot10^{-4}}\cdot6370 \approx 3{,}3\cdot10^{-2}\cdot6370 \approx 21\cdot10^{3}\cdot10^{-2} = 210$ км.

В итоге расстояние между массами будет $\underline{2x = 420 \text{ км}}$

Задача №1

Известно, что период колебаний маятника $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Пусть T_p – период маятника на полюсе, а T_e – на экваторе. Тогда $\frac{T_p}{T_e}=\frac{2\pi\sqrt{l/g_p}}{2\pi\sqrt{l/g_e}}=\sqrt{\frac{g_e}{g_p}}=\frac{1}{\eta}$ и $\frac{g_p}{g_e}=\eta^2=1{,}02^2\approx1{,}04$.

Отметим, что $g_p=\frac{GM}{R}$, а $g_e=\frac{GM}{R}-\omega^2R$, где M и R – масса и радиус планеты. Тогда $\frac{g_p}{g_e}=\frac{GM/R}{\frac{GM}{R}\left(1-\frac{\omega^2R^3}{GM}\right)}=$

$=\frac{1}{1-\frac{\omega^2R^3}{GM}}\approx1+\frac{\omega^2R^3}{GM}=\eta^2$

Также, если поднять маятник на высоту $h=130$ км, то ускорение свободного падения ~~на нем~~ будет равным g_e, т.е. $g_e=\frac{GM}{R+h}=\frac{GM}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)}$ и $\frac{GM/R}{GM/(R+h)}=\frac{GM/R}{\frac{GM}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)}=1+\frac{h}{R}=\frac{g_p}{g_e}=\eta^2$

Без использования двигателей по поверхности такой планеты можно двигаться, будучи спутником на низкой орбите, а относительно поверхности скорость будет максимальной тогда, когда спутник будет двигаться „навстречу" поверхности, т.е. против вращения планеты.

В итоге максимальная скорость $v=\sqrt{\frac{GM}{R}}+\omega R=\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}+\omega\right)R$

Здесь $\frac{GM}{R^3}=\frac{\omega^2}{\eta^2-1}$, а $R=\frac{h}{\eta^2-1}$. В итоге $v=\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\eta^2-1}}+\omega\right)\frac{h}{\eta^2-1}=\left(\frac{\omega}{\sqrt{\eta^2-1}}+\omega\right)\frac{h}{\eta^2-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}04}}+1\right)\cdot\frac{\omega h}{0{,}04}=$

$0{,}2$

$=\frac{(5+1)\omega h}{1/25}=150\omega h$

$h=130$ км, $\omega=\frac{2\pi}{10^ч}=\frac{2\pi}{3{,}6\cdot10^4с}=\frac{\pi}{1{,}8\cdot10^4с}$, ~~$v=150\cdot\frac{\pi}{1{,}8\cdot10^4}\cdot130\ км/с=\frac{5\pi}{6\cdot10^4}\cdot130\ км/с=\frac{5\pi}{6}\cdot13\cdot10\cdot10^{-4}$~~

$v=150\cdot\frac{\pi}{1{,}8\cdot10^4}\cdot130\ км/с=\frac{1{,}5\pi}{1{,}8}\cdot1{,}3\cdot10^2\cdot10^2\cdot10^{-4}\ км/с\approx3{,}4\ км/с$, из которых $1/6$ – это вращение планеты.

Вообще максимальная скорость составляла бы $\sqrt{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot3{,}4+\frac{1}{6}3{,}4\approx\frac{8}{6}\cdot3{,}4\approx4{,}5\ км/с$, но (вторая космическая + вращение планеты), но двигаться по поверхности бы точно не удалось. Да и ~~и~~ про любую скорость, большую, чем полученная, можно так сказать.

Ответ: 3,4 км/с

Задача №3

В движение галактик вносят вклад две компоненты: космологическая (удаление со скоростью Hr) и пекулярная.

В идеальном для фиолетового смещения случае вся пекулярная скорость направлена к нам. На критическом же для нас расстоянии она будет компенсировать космологическую, таким образом, $v_{pec}=Hr$.

Оценим $v_{рес}$. Разумно будет сказать, что галактики ~~движутся со скоростями, порядка первой космической для своих скоплений~~ находятся в скоплениях. Тогда их период $T \sim 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$, где M и R — масса и радиус скопления, а скорость галактик $v_{рес} \sim \sqrt{\frac{GM}{R}}$

Разумно оценить массу скоплений ~~$M \sim 10^{13} M_\odot$, а размеры $R \sim 10$~~ $M \sim 10^{13} \div 10^{16} M_\odot$, а размеры $R \sim 10^6 \div 10^7$ пк.

Тогда наиболее ~~большие~~ маленькие скорости будут порядка ~~$v_{рес} \sim \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 10^{16}}{2\cdot 10^5 \cdot 10^7}} \sim \sqrt{\frac{4\cdot 10^{17}}{2\cdot 10^{12}}} \approx 14 \frac{а.е.}{год} \approx 60$ км/с. Галактики будут еще друг к другу сближаться, так что можно взять $v_{рес} \sim 120$ км/с, а расстояние~~ ~~$v_{рес} \sim \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 10^1}{2\cdot 10^5 \cdot 10^7}}$~~

$$v_{рес} \sim \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 10^{13}}{2\cdot 10^5 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{4\cdot 10^{14}}{2\cdot 10^4}} = \sqrt{2000} \simeq 45 \text{ а.е./год} \approx 110 \text{ км/с}.$$

Галактики еще сближаются друг к другу, так что можно взять $v_{рес} \sim 220$ км/с, а расстояние $r = \frac{v_{рес}}{H} \sim \frac{220}{70} \sim \underline{3 \text{ Мпк}}$

Отметим, что галактика Андромеды приближается со скоростью 150 км/с, а хаббловская компонента равна H 70 км/с $\cdot$ 0,8 Мпк $\approx$ 55 км/с, т.е. её пекулярная скорость относительно нас 200 км/с. То есть наша оценка ~~более чем~~ довольно разумна.

Задача №2

Отметим, что голубых карликов не существует (Вселенная недостаточно стара для такого). ~~Из этого автоматически следует, что красных гигантов тоже не может быть~~ Также светимости карликов одинаковые, то есть карлики красные, а гиганты — голубые.

Также отметим, что компоненты в оптический диапазон разрешимы. Иными словами звёзды удалены друг от друга и эволюционируют отдельно. Обратим внимание, что красные карлики проводят перед главной последовательностью время порядка 10^9 лет. За это время голубые гиганты даже не то, что полностью проэволюционируют (с временем жизни порядка 10^8 лет), они успеют взорваться, порадовав нас звездой, видимой днём, но, к большому сожалению для нас, они не будут ничего излучать в оптическом диапазоне, что противоречит условию (если предположить, что в одной системе оказались красный карлик и голубой гигант).

То есть в одну систему входят два голубых гиганта, а в другую — два красных карлика. При этом последняя система будет старше.

Задача №4

Отметим, что так как H_α соответствует линии перехода с 3 на 2 уровень, то белый карлик слишком горячий для такой линии. Иными словами, H_α относится к звезде-компаньону. Тогда её максимальная лучевая скорость $v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c = \frac{0,46}{6563} \cdot 3 \cdot 10^5 \approx 21$ км/с, где $\Delta\lambda$ – полуамплитуда, λ – длина волны H_α в 6563 Å

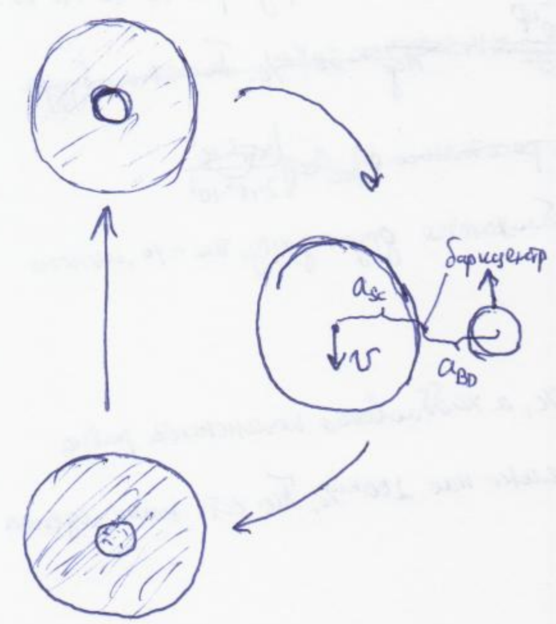

рис. 1

Отметим, что так как луч зрения лежит в плоскости орбиты, то скорость звезды-компаньона равна максимальной лучевой (рис. 1).

Отметим, что падение блеска фиксируется 2 раза ~~вокруг~~ ~~Это можно представить так потому, что когда белый карлик проходит перед звезд~~, ~~ибо белый карлик горячее и светится ярче, чем этот кусочек звезды того же размера, т.е.~~ на. за период обращения, т.е. период обращения $T = 2 \cdot 0,5 = 1$ год.

Обозначим массу белого карлика как M_{BD}, а массу звезды-компаньона – как M_{SC}. Тогда $M_{BD} \cdot a_{BD} = M_{SC} \cdot a_{SC}$.

Отметим, что $v = \omega \cdot a_{SC} = \frac{2\pi a_{SC}}{T}$. Т.к. $v = 21$ км/с $= 4,43$ а.е./год $= \frac{2\pi}{1 \text{ год}} a_{SC}$, то $a_{SC} = \frac{4,43}{2\pi} \approx 0,705$ а.е.

В то же время $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(M_{BD}+M_{SC})}{(a_{BD}+a_{SC})^3}$. В системе единиц а.е.-год-$M_\odot$ будет верно $M_{BD}+M_{SC} = (a_{BD}+a_{SC})^3$

Отметим, что $M_{SC} = \frac{a_{BD}}{a_{SC}} \cdot M_{BD} \Rightarrow M_{BD}\left(\frac{a_{BD}}{a_{SC}}+1\right) = M_{BD} \cdot \frac{a_{BD}+a_{SC}}{a_{SC}} = (a_{BD}+a_{SC})^3 \Rightarrow M_{BD} = (a_{BD}+a_{SC})^2 \cdot a_{SC}$, отсюда $a_{BD} = \sqrt{\frac{M_{BD}}{a_{SC}}} - a_{SC}$. ~~Отсюда~~ Возьмём нижнюю границу массы белого карлика $M_{BD} = 0,5 M_\odot$, а максимально возможную – $1,4 M_\odot$. Тогда минимум $a_{BD} = \sqrt{\frac{0,5}{0,7}} - 0,7 \approx 0,15$ а.е., а максимум $a_{BD} = \sqrt{\frac{1,4}{0,7}} - 0,7 = 1,44 - 0,7 = 0,7$ а.е.

Отсюда минимальная масса звезды-компаньона $M_{SC} = \frac{a_{BD}}{a_{SC}} \cdot M_{BD} = \frac{0,15}{0,7} \cdot 0,5 \approx 0,17 M_\odot$, а максимальная – $M_{SC} = \frac{0,7}{0,7} \cdot 1,4 = 1,4 M_\odot$.

Отметим, что нижняя граница массы белого карлика была взята, исходя из того, что звезда, похожая на Солнце, оставила после себя половину своей массы (а менее массивные ~~ко~~ звёзды ещё проэволюционировать не успели). Верхняя граница массы – это предел Чандрасекара.

Также везде система получается не тесная, поэтому компоненты эволюционируют сами по себе. В этом случае белый карлик просто обязан был возникнуть из быстро эволюционировавшей звезды и в том, что его масса больше массы звезды-компаньона, нет ничего удивительного.

Ответ: $(0,17 \div 1,4) M_\odot$