СПб-112

№1

1) Для упрощения вычислений допустим, что склонение Солнца в течение года изменяется равномерно, проходя за год:

$(23{,}5^\circ - (-23{,}5)^\circ)\cdot 2 = 94^\circ$

То есть за 60 дней полярной ночи склонение Солнца изменится на

$94^\circ \cdot \frac{60}{365} \approx \frac{1}{6}\cdot 94 \approx 15{,}6^\circ$

В день начала и конца полярной ночи Солнце имеет одинаковое склонение равное:

$-23{,}5^\circ + \left(\frac{15{,}6^\circ}{2}\right) = -15{,}7^\circ$

~~Полярная ночь~~ Начало полярной ночи означает, что максимальная высота Солнца над горизонтом равна 0°

$90^\circ - \varphi + (-15{,}7^\circ) = 0^\circ$

$\varphi = 90^\circ - 15{,}7^\circ = 74{,}3^\circ$

2) $2\cdot h_{н.к} = h_{в.к}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2(-90^\circ+\varphi+\delta)=90^\circ+\delta-\varphi\\ \delta<\varphi\end{cases}\\ \begin{cases}2(-90^\circ+\varphi+\delta)=90^\circ+\varphi-\delta\\ \delta>\varphi\end{cases}\end{array}\right.
\quad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-180^\circ+2\varphi+2\cdot\delta=90^\circ+\delta-\varphi\\ \delta<\varphi\end{cases}\\ \begin{cases}-180^\circ+2\varphi+2\delta=90^\circ+\varphi-\delta\\ \delta>\varphi\end{cases}\end{array}\right.
\quad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\delta=270^\circ-3\varphi\\ \delta<\varphi\end{cases}\\ \begin{cases}\delta=90^\circ-\frac{\varphi}{3}\\ \delta>\varphi\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\delta=47^\circ\\ \delta<74{,}3^\circ\end{cases}\\ \begin{cases}\delta=65^\circ\\ \delta>74{,}3^\circ\end{cases}\end{array}\right. \Big/ \quad \delta = 47^\circ$$

Ответ: 47°

СПБ-11 2

№3.

1) По III закону Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$, т.к. $M = 2M_\odot$, то в системе единиц год, а.е, масса Солнца:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{1}{2}$$

$$T_1 = \frac{a_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}, \quad T_2 = \frac{a_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$$

2) Солнечные сутки на планете равны синодическому периоду:

$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{t_1} - \frac{1}{T_1} \qquad S_1 = \frac{T_1 \cdot t_1}{T_1 - t_1}$$

$$\frac{1}{S_2} = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{T_2} \qquad S_2 = \frac{T_2 \cdot t_2}{T_2 - t_2}$$

где t_1 и t_2 - периоды осевого вращения планет

По условию $S_1 = S_2$, а $t_2 = 2t_1$

$$\frac{T_1 \cdot \cancel{t_1}}{T_1 - t_1} = \frac{T_2 \cdot 2\cancel{t_1}}{T_2 - 2t_1}$$

$$T_1T_2 - 2T_1 \cdot \cancel{t_1} = 2T_1T_2 - 2T_2\cancel{t_1}$$

$$T_1T_2 = 2t_1(T_2 - T_1)$$

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{T_1T_2}{T_2 - T_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{a_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}}{\frac{a_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{a_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{(a_1a_2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\,(a_2^{\frac{3}{2}} - a_1^{\frac{3}{2}})} \cdot \frac{1}{2} =$$

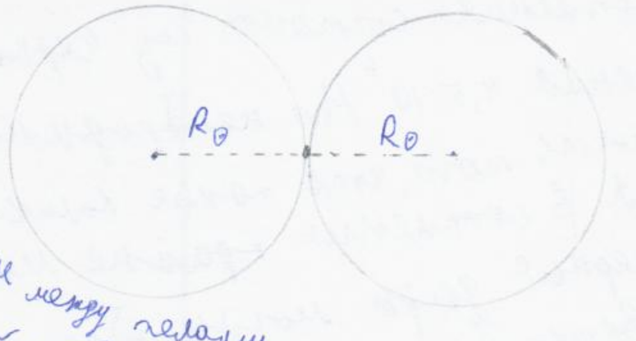
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}4^{\frac{3}{2}}}{0{,}8^{\frac{3}{2}} - 0{,}5^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}4 \cdot \sqrt{0{,}4}}{0{,}8 \cdot \sqrt{0{,}8} - 0{,}5\sqrt{0{,}5}} \approx \frac{0{,}4 \cdot \sqrt{0{,}05}}{0{,}8 \cdot 0{,}9 - 0{,}5 \cdot 0{,}4} \approx$$

$$\approx \frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \text{ года}$$

$$t_2 = 2t_1 = \frac{4}{9} \text{ года}$$

Ответ: $\frac{2}{9}$ года для внутренней планеты; $\frac{4}{9}$ года для внешней

№4. СПБ-112



По III закону Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)}$$, где a — расстояние между телами

$a = R_\odot + R_\odot = 2R_\odot = 140\,000$ км $\approx 10^{-3}$ а.е.

В системе единиц год, а.е., массы Солнца:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{2}$$ (т.к. звезды типа Солнца, то $M_1 = M_2 = 1M_\odot$)

$$T^2 = \frac{a^3}{2} = \frac{10^{-9}}{2} = 5\cdot10^{-10}$$

т.к. в одном году $\approx \pi\cdot10^7$ секунд, то:

$$\left(\frac{T_c}{\pi\cdot10^7}\right)^2 = 5\cdot10^{-10}$$

$$T_c^2 = \pi^2\cdot5\cdot10^{-10}\cdot10^{14} \approx 49\cdot10^4$$

$T_c = 700$ секунд

~~Ответ: 700 секунд~~

Обе звезды лежат на главной последовательности, где есть прямая зависимость радиуса от температуры звезды.
Солнце имеет спектральный класс G
Если обе звезды будут иметь спектральный класс F (горячее, чем Солнце), то значит: их радиусы будут больше, а значит орбитальный период увеличится (из выведенных выше формул видно, что период прямопропорционален расстоянию между звездами)
Если же звезды будут иметь спектральный класс K, то есть $T_K < T_G < T_F$, значит и радиусы звезд, и орбитальный период уменьшатся

Ответ: 700 секунд.

№5.

СПБ-112

Если скопление состоит из черных дыр звездных масс, то для получения $4{,}5 \cdot 10^6\ M_\odot$ необходимо около 10^6 таких черных дыр.
Вероятность того, что такое количество черных дыр окажутся в скоплении крайне мала.
Такие черные дыры могли образоваться только при взрыве сверхновых (коллапсом образуются черные дыры больших масс),
поэтому скорее всего череда взрывов сверхновых разрушила бы это скопление.
Поэтому скорее всего такое скопление изначально не могло образоваться в центре галактики

№2.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\ м/с}{12 \cdot 10^{12}\ Гц} = 0{,}25 \cdot 10^{-4}\ м$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{D} = \frac{0{,}25 \cdot 10^{-4}}{2} = 0{,}125 \cdot 10^{-4}\ радиан$$