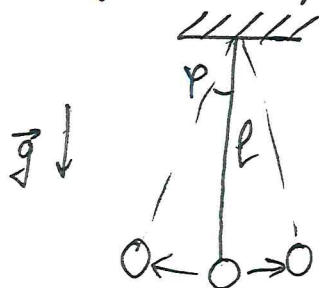


№.

1011-000

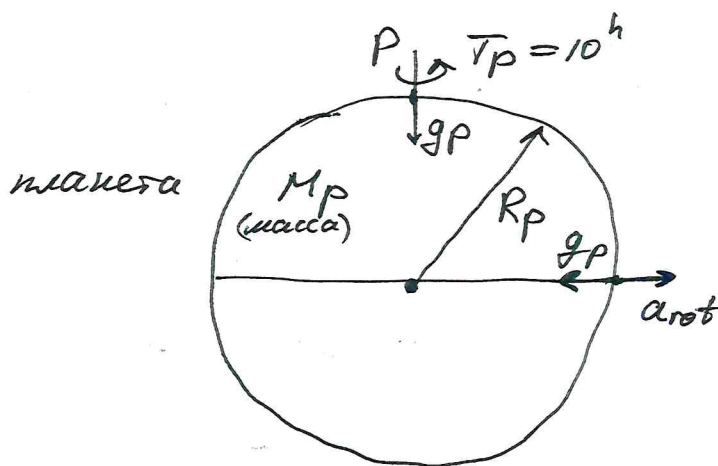
Ф-ла для периода колебаний маятника:



$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad ; \quad g - \text{ускорение св. тягения.}$$

$$\omega^2 \equiv \frac{g}{l}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = \boxed{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$



Ускорение св. тяг. на полюсе:  $g_p = \frac{GM_p}{R_p^2}$

Эффективное ускор. св. тяг. на экв.:  $g_{\text{eff}} = g_p - a_{\text{rot}}$

$a_{\text{rot}} = \omega_{\text{rot}}^2 R_p = \frac{4\pi^2}{T_p^2} R_p$  — центробежное ускорение.

Также нам известно, что над полюсом на высоте  $h$  ( $h = 130 \text{ km}$ )  $g_h \equiv g_{\text{eff}}$  (условие рав-ва периодов, т.к.  $l \equiv g \text{ const}$ ).

Запишем:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{GM_p R_p^2}} \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,02 \cdot T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\frac{GM_p}{R_p^2} - \frac{4\pi^2}{T_p^2} R_p}} \end{array} \right. \quad (\text{II})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,02 T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{GM_p (R_p + h)^2}} \end{array} \right. \quad (\text{III})$$

1 из 8

1)  $R_p$  —? (I и III)

~~1,02~~ ~~1,02~~ ~~1,02~~

$$\frac{1,02}{1} = \sqrt{\frac{(R_p + h)^2}{R_p^2}} = \frac{R_p + h}{R_p} = 1 + \frac{h}{R_p} \Rightarrow R_p = \frac{h}{0,02} = \frac{130000}{0,02}$$

$$= \boxed{6500000 \text{ km?}}$$

Прог.

№1. Задача.

DOI-085

2)  $M_p$  - ? (I и II)

$$\frac{1,02}{1} = \sqrt{\frac{\frac{GM_p}{R_p^2}}{\frac{GM_p}{R_p^2} - \frac{4\pi^2}{T_p^2} \cdot R_p}}$$

$$\left(\frac{1}{1,02}\right)^2 = \frac{\frac{GM_p}{R_p^2} - \frac{4\pi^2}{T_p^2} \cdot R_p}{\frac{GM_p}{R_p^2}} = 1 - \frac{\frac{4\pi^2 R_p^3}{T_p^2 \cdot GM_p}}{1}$$

$$\frac{4\pi^2 R_p^3}{T_p^2 \cdot GM_p} = 1 - \left(\frac{1}{1,02}\right)^2 \approx 1 - \left(\frac{1}{1+0,02}\right)^2 = 1 - (1+0,02)^{-2} \approx 1 - (1-2 \cdot 0,02) = 0,04.$$

$$M_p = \frac{4\pi^2 R_p^3}{T_p^2 \cdot 0,04} \approx \frac{9 \cdot 6500000^3}{(10 \cdot 3600)^2 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-2}} \approx$$

$$\approx \frac{9 \cdot 65 \cdot 10^{18} \cdot 10^{13}}{36^2 \cdot 10^6 \cdot 7 \cdot 10^{-13}} = \left[ 10^{25} \cdot \frac{9 \cdot 5 \cdot 13}{6^4 \cdot 7} \text{ кг.} \right]$$

(похоже на уралгу).

3)  $v_{\max}$  - ?

Максимальная скорость — движая к I космической.

$$v_{\max} \approx \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}} \approx \sqrt{\frac{4\pi^2 R_p^3}{T_p^2 \cdot 0,04 \cdot R_p}} = R_p \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_p^2 \cdot 0,04}} =$$

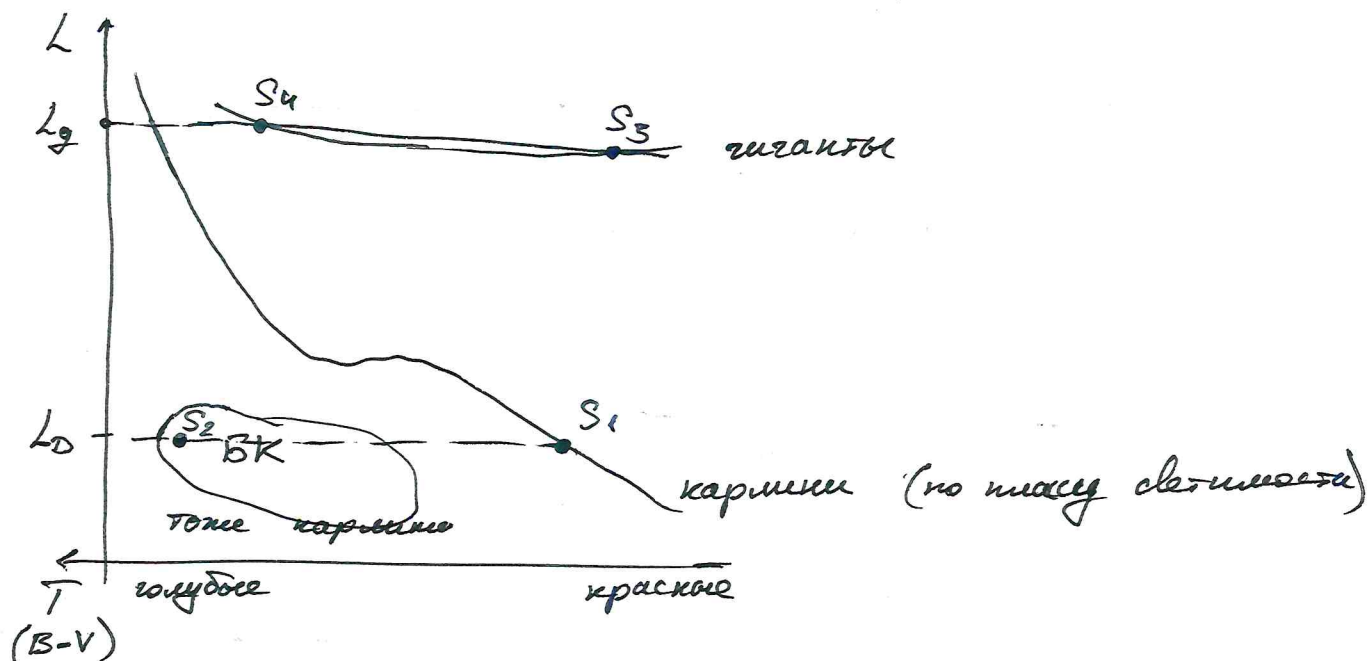
$$= R_p \frac{2\pi}{T_p \cdot 0,2} = \frac{\pi R_p}{0,1 \cdot T_p} \approx \frac{8 \cdot 65000}{0,1 \cdot 10 \cdot 3600} = \frac{18 \cdot 5 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^2} \approx \left[ 50 \frac{\text{км}}{\text{с}} \right]$$

Ответ: max скорость  $\approx 50 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ .

№2.

2011-005

Изобразите (схематически) диаграмму ГР:



$S_1, S_2$  — карлики, при этом  $L(S_1) \equiv L(S_2)$ ,

$S_1$  — красной

$S_2$  — голубой.

$S_3, S_4$  — гиганты, при этом  $L(S_3) \equiv L(S_4)$

$S_3$  — красной

$S_4$  — голубой.

Можно видеть 2 парные пары:

$S_1$  и  $S_4$  (кр. карл. и голуб. гигант)

и  $S_3$  и  $S_2$  (кр. гигант. и уже проэволюционировавший БК).

Старше система  $S_3$  и  $S_2$ , т.к.  $S_2$  уже на стадии БК (возраст. БК больше возраста  $S_1$  и тем более  $S_4$ ).

Ответ: пары  $S_1$  и  $S_4$   
 $S_2$  и  $S_3$  (см. рис.)

$S_3$  и  $S_2$  — старше.

№3.

(201-085)

Таманттики, как известно, от нас удаляются. ( $v_H$ )

Рисованное смещение может наблюдаться и отдельных компонентов (в т.ч. и звезд) скорость которых направлена на нас, и не превосходит  $v_H$  (скорость удал. гал-ки).

Скорость вращения гал-ки может достигать  $\sim 700 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ .

Однако скорость отд. звезд до  $\sim 1000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$  (полюды дисперсион. звезды).

Можно при большом пелении и скорости вращ.  $\odot$  вокруг центра Таманттики учесть ( $\sim 200 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ ).

(скорость Там. ~~вращ.~~ отн. ц.м. Местной группы учитывать не будем) ~~и радиус до расст. до~~

Итого, max вzm. скорость (встречная)  $\sim 1000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ .

По з-ну Хаббла

$$v = Hr \Rightarrow r = \frac{1000}{H} \approx 12,3 \text{ Мpc} \approx \boxed{12 \text{ Мpc}}$$

~~Скорость  $\odot$  отн. ц.м. Местной группы гал-ки  $v \approx 800 \frac{\text{км}}{\text{с}}$~~

Если учесть ~~см~~ вращ.  $\odot$  вокруг центра Там-ки  $v_0 \approx 200$

$v_0$  итоговая max скорость (встречная) может быть

$$v \approx 1200 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

По з-ну Хаббла:

$$v = Hr \Rightarrow r = \frac{1200}{H} \approx \boxed{18 \text{ Мpc}}, \text{ что довольно далеко.}$$

Про влияние в Местной группе мы мало что знаем. Поэтому нам достаточно оценкой, приведенной выше.

Ответ: до 18 Мpc.

N<sub>4</sub>.H<sub>2</sub>

$$\Delta\lambda = 0,46 \text{ \AA}$$

$$T = 0,5 \text{ yr.}$$

$$i = 90^\circ$$

$$e = 0$$

$$M_{*1} = ? [..]$$

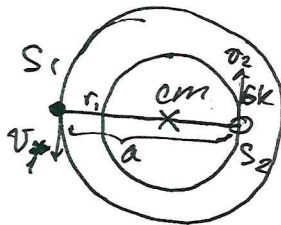
линия H<sub>2</sub> может наблюд. в спектре галактики-компаньона (у БК их нет).

Тогда, скорость галактики:

$$v_{*1} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c = \frac{0,46}{6563} \cdot c \approx 46,4 \cdot 10^3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 0,021 \cdot 10^3 \approx \boxed{21 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \approx 20 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\lambda = 6563 \text{ \AA}$$

набл.



S<sub>1</sub> - галактика-компаньон.

S<sub>2</sub> - БК

см - центр масс.

$$\left\{ \begin{aligned} v_1 &= \frac{2\pi r_1}{T} = \frac{2\pi(a)}{T} \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} - \text{радиальная скорость. (max).} \\ \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} - \text{III з.к. Кеплера.} \end{aligned} \right.$$

$$\left( \frac{v_1 T}{2\pi} \cdot \frac{M_1 + M_2}{M_2} \right)^3 = \frac{T^2 \cdot G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

$$\frac{v_1^3 \cdot T^3}{4\pi^2 \cdot 2\pi} \cdot \frac{(M_1 + M_2)^3}{M_2^3} = \frac{T^2 G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

Получили з-но масс:

$$\left| \frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^3} = \frac{v_1^3 T}{2\pi G} \right|$$

Определим, в каком интервале может быть M<sub>2</sub>:

Верхний предел (как драконар) M<sub>2, max</sub> = 1,4 M<sub>0</sub>.

Нижний:

масса галактики, которая сейчас становится БК:

$$\tau \approx 14 \cdot 10^9 \text{ yr} - \text{возраст Вселенной}$$

$$\tau_0 \approx 10 \cdot 10^9 \text{ yr} - \text{возр. } \odot$$

$$\tau \sim \frac{M^2}{L} \sim \frac{M^2}{M^4} \sim \frac{1}{M^2}$$

$$\left( \frac{M}{M_0} \right)^{-2} = \frac{\tau}{\tau_0} \Rightarrow M = M_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx M_0 \cdot \left( \frac{14}{10} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \underline{0,5 M_0}$$

проц.

5 ч 8

Т.е.  $M_2 \in [0,5; 1,4] M_\odot$ .

Тогда  $M_1$ :

$$\frac{M_2 = 0,5 M_\odot}{M_1 = \left( \frac{2\pi G M_2^3}{v_1^3 \cdot T} \right)^{\frac{1}{2}} - M_2}$$

$$\frac{M_1}{M_\odot} = \left( \frac{2\pi G M_2^3}{v_1^3 \cdot T \cdot M_\odot^3} - \frac{M_2}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M_1 \approx \left( \frac{6 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 0,5^3 \cdot 2^3 \cdot 10^{90}}{(20000)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^7} - 0,5 \cdot 2 \cdot 10^{30} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx \left( \frac{8 \cdot 7 \cdot 10^{79}}{2^{3,5} \cdot 10^{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^7} - 10^{30} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 10^{30} =$$

$$= \left( \frac{7 \cdot 10^{60}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} - 10^{30} = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot 10^{30} - 10^{30} = \left( \sqrt{\frac{7}{2}} - 1 \right) \cdot 10^{30}$$

$$\approx (1,9 - 1) \cdot 10^{30} \approx 0,9 \cdot 10^{30} \approx \frac{0,9 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 10^{30}} M_\odot \approx \boxed{0,45 M_\odot} \approx \boxed{0,5 M_\odot}$$

$$M_2 = 1,4 M_\odot \approx 1,5 M_\odot$$

$$M_1 = \left( \frac{2\pi G M_2^3}{v_1^3 \cdot T} \right)^{\frac{1}{2}} - M_2 \approx \left( \frac{6 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 1,5^3 \cdot 2^3 \cdot 10^{90}}{(20000)^3 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} - 10^{30} =$$

$$= \left( \frac{8 \cdot 7 \cdot 3^3 \cdot 10^{79}}{2^{3,5} \cdot 3 \cdot 10^{19}} \right)^{\frac{1}{2}} - 10^{30} = \left( \frac{7 \cdot 9}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{30} - 10^{30} =$$

$$= \left( \left( \sqrt{\frac{63}{2}} - 1 \right) \cdot 10^{30} \approx (5,6 - 1) \cdot 10^{30} \approx 4,6 \cdot 10^{30} =$$

$$= \frac{4,6 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 10^{30}} M_\odot \approx \boxed{2,3 M_\odot}$$

Овлб: масса глуга-компаньона  $M_1 \in [0,5; 2,3] M_\odot$ .

№5.

XXXI-VIII

$$U(r, \varphi) = \frac{GM_{\odot}}{r} \left( 1 - J_2 \left( \frac{R_{\odot}}{r} \right)^2 \frac{3 \sin^2 \varphi - 1}{2} \right)$$

Что-то мне подсказывает, что в данном выражении и перед  $J_2$  должен быть "+".

Чтобы избавиться от этой неоднозначности:

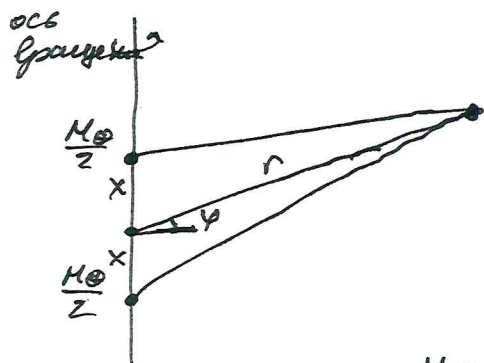
$3 \sin^2 \varphi - 1 \equiv 0$  — будем решать для такого  $\varphi$ .

$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$  — для северного полушария.

Тогда:

$$U(r) = \frac{GM_{\odot}}{r}.$$

Для приближения с 2-мя массами:



$$U = \frac{G \frac{M_{\odot}}{2}}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \sin \varphi}} + \frac{G \frac{M_{\odot}}{2}}{\sqrt{r^2 + x^2 + 2rx \sin \varphi}} = \frac{1}{2} \frac{GM_{\odot}}{r}$$

$$= \frac{GM_{\odot}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2 - \frac{2rx}{\sqrt{3}}}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2 + \frac{2rx}{\sqrt{3}}}} \right) = \frac{GM_{\odot}}{2r} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2} - \frac{2x}{\sqrt{3}r}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2} + \frac{2x}{\sqrt{3}r}}} \right)$$

Приравняем:

$$\frac{GM_{\odot}}{r} = \frac{GM_{\odot}}{2r} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2} - \frac{2x}{\sqrt{3}r}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2} + \frac{2x}{\sqrt{3}r}}} \right)$$

Заменим:  $\frac{x}{r} \equiv y$

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}y + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}y + y^2}} \quad \text{— получим упр.}$$

Решим его отн. y:

$$2 = \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}y + y^2} + \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}y + y^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}y + y^2\right)^2}}$$

7 и 8

Прог.

$$2 \approx \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{2} + 1 - \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{2}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}y^2}}$$

$$2 \approx (2 + y^2) \cdot (1 + \frac{2}{3}y^2)$$

$$2 \approx 2 + \frac{4}{3}y^2 + y^2 + \frac{2}{3}y^4$$

$$2 \approx 2 + \frac{4}{3}y^2 + y^2 + \frac{2}{3}y^4$$

$$\frac{4}{3}y^2 - y^2 = -\frac{2}{3}y^4$$

$$y \neq 0$$

$$\frac{4}{3} - 1 = -\frac{2}{3}y^2$$

Методом подбора (и радиометра) получили  $y \approx \frac{200 \text{ km}}{R_\oplus}$

Отв: ~~200~~ расстояние между массами 200 km.

Если посчитать для  $U(r, \varphi) = \frac{GM_\oplus}{r} \left( 1 + J_2 \left( \frac{R_\oplus}{r} \right)^2 \frac{3 \sin^2 \varphi - 1}{2} \right)$   
 $\varphi = 0$  и  $r = R_\oplus$  (нулеординатное экваториальное спутники)

$$U = \frac{GM_\oplus}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$x \approx 200$$

$$U(r, \varphi) \equiv U.$$

$$x \approx 200 \text{ km} \approx \sqrt{J_2} R_\oplus.$$