Код: СПБ-099 Лист 1.1/1 (первая страница первого листа)

№1

$M_з$ - масса Земли M_p - масса планеты (считаем, что планета - однородный шар)
$r_з$ - радиус Земли r_p - радиус планеты
$L_з$ - длина экв. Земли L_p - длина экв. планеты

$L_з \approx 40000$ км

$$\frac{r_p}{r_з} = \frac{\frac{L_p}{2\pi}}{\frac{L_з}{2\pi}} = \frac{L_p}{L_з} = \frac{60000\text{ км}}{40000\text{ км}} = \frac{3}{2}$$

$$g_p = G \cdot \frac{\Delta m \cdot M_p}{r_p^2} \Leftrightarrow \frac{M_p}{r_p^2} = \frac{M_з}{r_з^2} \Leftrightarrow \frac{M_p}{M_з} = \frac{r_p^2}{r_з^2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$
$$\parallel$$
$$g_з = G \cdot \frac{\Delta m \cdot M_з}{r_з^2}$$

a_a - радиус орбиты нового спутника (назовем спутник Афина)
(да, мы стали давать греческие имена в далеком будущем)

$a_л$ - большая полуось Луны

$a_л \approx 380\,000$ км

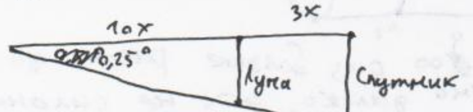
$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{a_a^3}{GM_p}} = T_л = 2\pi\sqrt{\frac{a_л^3}{GM_з}}$$

$$\frac{a_a^3}{M_p} = \frac{a_л^3}{M_з} \qquad \frac{a_a}{a_л} = \sqrt[3]{\frac{M_p}{M_з}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \approx \frac{2{,}08}{1{,}6} = \frac{104}{80} = \frac{13}{10}$$

$1{,}6^3 = 4{,}096$
$2{,}08^3 = 8{,}9989$

$d_л = 0{,}5^\circ \Rightarrow d_a = 0{,}5^\circ$

расстояние до [crossed out] спутника в зените $\approx$ расстоянию от центра планеты.



$$\frac{r_a}{r_л} = \frac{a_a}{a_л} = \frac{13}{10} \qquad r_л \approx 1700\text{ км}$$

$$a_a = \frac{13}{10}a_л = \frac{13}{10}\cdot 380\,000\text{ км} = 13 \cdot 38000\text{ км} = 494\,000\text{ км}$$

$$r_a = \frac{13}{10}r_л = \frac{13}{10}\cdot 1700\text{ км} = 2210\text{ км}$$

Ответ: ~~494 тыс км; 2,2 тыс км~~
490 000 км; 2 200 км

Код: СПБ-099 Лист 1.2/1 (вторая страница первого листа)

№2

$\rho_1 = ?$ 30%

$\rho_2 = 3000 \frac{кг}{м^3}$ 30% - 70%

$\rho_3 = 600 \frac{кг}{м^3}$ 70% - 100%

$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}3r)^3$

$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}7r)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}3r)^3$

$V_3 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}7r)^3$

$$\rho = \frac{V_1\rho_1 + V_2\rho_2 + V_3\rho_3}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}3^3 r^3 \cdot \rho_1 + \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot (0{,}7^3 - 0{,}3^3) + \frac{4}{3}\pi r^3 (1 - 0{,}7^3)}{\frac{4}{3}\pi r^3} =$$

$$= 0{,}3^3\rho_1 + (0{,}4 \cdot (0{,}7^2 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3^2))\rho_2 + (0{,}3 \cdot (1 + 0{,}7 + 0{,}7^2))\rho_3 =$$

$$= 0{,}027\rho_1 + 0{,}4 \cdot (0{,}49 + 0{,}21 + 0{,}09)\rho_2 + 0{,}3 \cdot (1 + 0{,}7 + 0{,}49)\rho_3 =$$

$$= 0{,}027\rho_1 + 0{,}4 \cdot 0{,}79 \cdot 3000 + 0{,}3 \cdot 2{,}19 \cdot 600 =$$

$$= 0{,}027\rho_1 + 316 \cdot 3 \text{ кг} + 65{,}7 \cdot 6 \text{ кг} = 1530 \text{ кг}$$

$$0{,}009\rho_1 + 316 \text{ кг} + 131{,}4 \text{ кг} = 510 \text{ кг}$$

$$0{,}009\rho_1 = 62{,}6$$

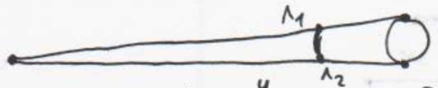
$$9\rho_1 = 62600$$

$$\rho_1 = \frac{62600}{9} = 6950 \frac{кг}{м^3}$$

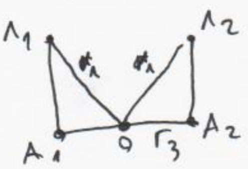
Ответ: $6950 \frac{кг}{м^3}$

№3

Продолжительность затмения? Будем считать, что затмение полное на прямой Солнце-Луна происходит. То есть солнечное затмение $\exists$, когда Луна на дуге $\Lambda_1\Lambda_2$



Заметим, что расстояние до Солнца огромно (в 400 раз больше расст. до Луны), поэтому будем считать, что Солнце бесконечно далеко, это не сильно изменит оценку.



O - центр Земли $\Rightarrow \angle(\Lambda_1 O \Lambda_2) = \angle(A_1\Lambda_1 O) + \angle(A_2\Lambda_2 O) = 2\angle(A_1\Lambda_1 O) =$

A_1, A_2 - „края"

$$= 2\sin^{-1}\left(\frac{r_3}{a_\Lambda}\right) = 2\sin^{-1}\left(\frac{6400}{400000}\right) \approx 2 \cdot \frac{6400}{400000} \text{ rad} =$$

$$= \frac{32}{1000} \text{ rad} = \frac{32 \cdot 180^\circ}{1000 \cdot \pi} = \frac{32 \cdot 18}{100\pi} \approx \frac{576}{314} = \frac{288}{157} \approx \underline{1{,}8^\circ}$$

$a_\Lambda \approx 400000$ км

$r_3 \approx 6400$ км

360° — 28 дней (период обращения Луны ≈ 28 сутки)

$1{,}8^\circ$ — $\frac{28 \cdot 24}{200}$ ч $= \frac{14 \cdot 12}{50}$ ч $= \frac{336}{100}$ ч $= \underline{3{,}36 \text{ ч}}$

160 млн детей / год $\Rightarrow \approx$ 18000 детей / ч $\Rightarrow$ 18000 · 3,36 = 60480 детей

Ответ: 60000 детей

Код: СПб – 0,99 Лист 2.1 / 2 (первая страница второго листа)

№4

$\cancel{R_1(t) = R_2(t)}$

$\cancel{k\cdot E_1^{1/5}\cdot t^{2/5} = k\cdot E_2^{1/5}}$ $\qquad E_2 = 32E_1$

$R_1(t)+R_2(t) = r = 300\text{ пк}$

$k\cdot E_1^{1/5}\cdot t^{2/5} + k\cdot E_2^{1/5}\cdot t^{2/5} = 300\text{ пк}$

$k\cdot t^{2/5}\cdot\left(E_1^{1/5}+E_2^{1/5}\right) = 300\text{ пк}$

$k\cdot t^{2/5}\cdot\left(E_1^{1/5}+2E_1^{1/5}\right) = 300\text{ пк}$

$3E_1^{1/5} = \frac{300\text{ пк}}{k\cdot t^{2/5}}$

$E_1^{1/5} = \frac{100\text{ пк}}{k\cdot t^{2/5}}$

$E_2^{1/5} = \frac{200\text{ пк}}{k\cdot t^{2/5}} \qquad \left(E_2^{1/5} = (E_1\cdot 32)^{1/5} = E_1^{1/5}\cdot 2\right)$

$R_2(t) = k\cdot E_2^{1/5}\cdot t^{2/5} = \frac{200\text{ пк}}{k\cdot t^{2/5}}\cdot k\cdot t^{2/5} = 200\text{ пк}$

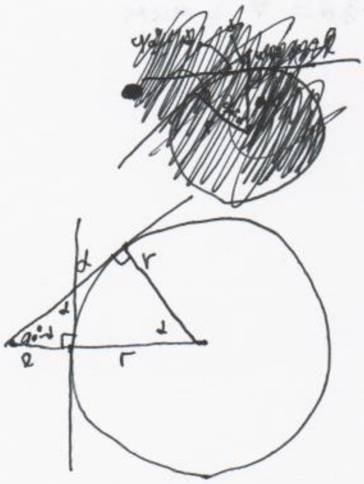
Ответ: 200 пк от более мощной

№5

Будем считать, что рефракция на уровне моря и на 442 метрах ≈ равна, тогда она скомпенсируется, и разница будет появляться лишь из-за того, что на большей высоте горизонт ниже.

$r \approx 6400$ км

$l = 442\text{ м} \approx 500\text{ м}$



$\angle\alpha$ – маленький

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{r}{l+r}\right) \approx \sqrt{1-\left(\frac{r}{l+r}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{6400^2}{6400{,}5^2}} = \sqrt{\frac{0{,}5\cdot 12800{,}5}{(6400{,}5)^2}} =$

$= \sqrt{\frac{25601}{12801^2}} = \frac{\sqrt{25601}}{12801} \approx \frac{160}{12801} = \frac{160\cdot 180}{12801\,\pi} \approx \frac{16\cdot 18\cdot 100}{12801\cdot 3{,}14} =$

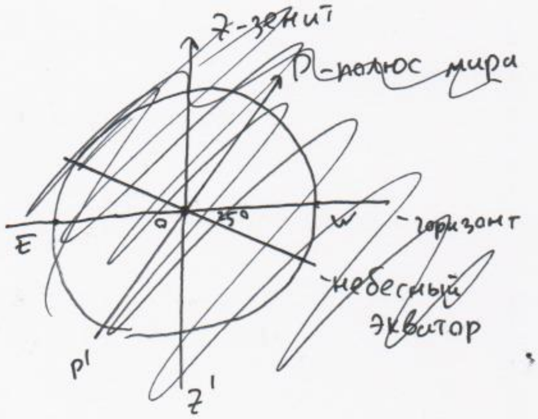
$= \frac{28800}{40195{,}14} \approx 0{,}7^{\circ}$

Продолжение на обороте Лист 2.2

Код: СПб-099 Лист 2.2/2 (Вторая страница второго листа)

~~День зимнего солнцестояния – Солнце дольше всего (важно?) угол движения по небу min z) дольше будет проходить (α => разница будет максимальной~~

Рассмотрим Солнцестояние и нарисуем красивую штучку:



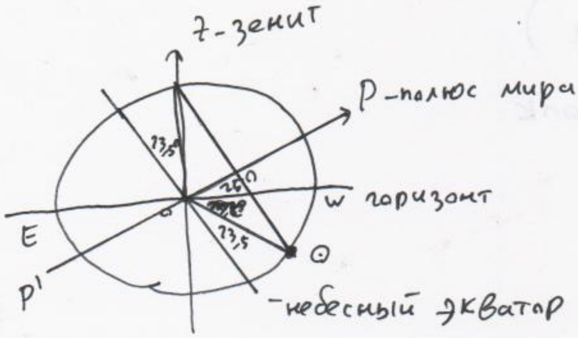
($25° > 24°$ => солнце всегда будет на юге в кульминации)

угол между ~~горизонтом~~ полюсом мира и ~~небесным экватором~~ горизонтом $= \varphi = 25°$

Раз у нас солнцестояние, то день длиннее ночи (как неожиданно)

⇓

нижняя кульминация Солнца на $23{,}5°$ выше неб. экватора



Тогда, из великих геометрических соображений, мы получаем, что Солнце под горизонтом было $51{,}5°$, а над горизонтом – $88{,}5°$

Значит в сумме прошло $140° \cdot 2 = 280°$ за 24 ч. (почти равномерно) ⇐

$$\alpha = 0{,}7° \text{ за } \frac{0{,}7}{280} \cdot 24 \cdot 60 =$$

⇐ $$= \frac{24 \cdot 60}{400} = \frac{24 \cdot 6}{40} = \frac{36}{10} = 3{,}6 \text{ мин}$$

2α (восход и закат) за $2 \cdot 3{,}6 = 7{,}2$ мин

Ответ: на 7,2 минуты