N1

1. $g = g_\oplus \Rightarrow \frac{GM}{R^2} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} \Rightarrow \frac{M}{R^2} = \frac{M_\oplus}{R_\oplus^2} \Rightarrow M = \frac{M_\oplus \cdot R^2}{R_\oplus^2}$

2. $l_{экв} = 2\pi R = 60 \cdot 10^3$ км

$\pi R = 30 \cdot 10^3$ км , $\pi = 3{,}14 \approx 3$

$R \approx 10 \cdot 10^3$ км $\approx 10^4$ км

3. $T = T_Л$

по III обобщ. з-ну Кеплера:

$$\frac{T^2 \cdot M}{T_Л^2 \cdot M_\oplus} = \frac{a^3}{a_Л^3} \Rightarrow a = a_Л \sqrt[3]{\frac{T^2 M}{T_Л^2 \cdot M_\oplus}} = a_Л \cdot \sqrt[3]{\frac{\cancel{T^2} \cdot \cancel{M_\oplus} \cdot R^2}{R_\oplus^2 \cdot \cancel{T_Л^2} \cdot \cancel{M_\oplus}}} =$$

$$= a_Л \sqrt[3]{\frac{R^2}{R_\oplus^2}}$$

, $R = 10^4$ км

$R_\oplus = 6400$ км $= 6{,}4 \cdot 10^3$ км

$a_Л = 384400$ км

$$a = 384400 \text{ км} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{10^4}{6{,}4 \cdot 10^3}\right)^2} = 384400 \text{ км} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{10}{6{,}4}\right)^2} \approx 384400 \times \sqrt[3]{1{,}5^2} =$$

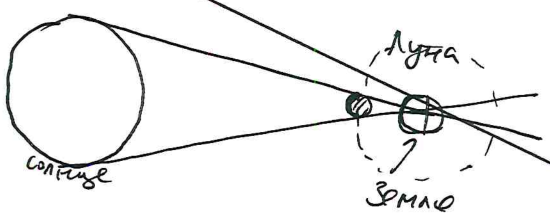
$$\approx 384400 \cdot 1{,}35 \approx \boxed{518940 \text{ км}}$$

$\alpha = \alpha_Л \Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{R_Л}{a_Л} \Rightarrow \frac{R}{\cancel{a_Л} \cdot 1{,}35} = \frac{R_Л}{\cancel{a_Л}} \Rightarrow R = 1{,}35 R_Л \approx \boxed{2346{,}3 \text{ км}}$

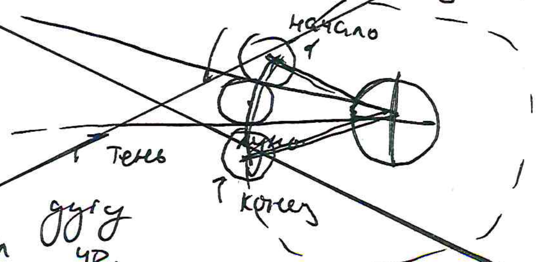
($R_Л = 1738$ км)

N3

Оценим длительность солнечного затмения:



~~Время~~ Длит. полного солн. затмения - промежуток времени между его началом и концом:



Значит, Луна должна пройти дугу по орбите, равную $\frac{R_Л + 2R_Л + R_Л}{a_Л} = \frac{4R_Л}{a_Л} \approx 2\alpha_Л \approx 1°$

угловой диам. Луны ($\alpha = 0{,}5°$)

$\tau_{затм} = \frac{1°}{360°} \cdot S$, S – синод. период Луны ($29{,}5^d \approx 30^d$)

$\tau_{затм} = \frac{1° \cdot 30^d}{360°} \approx \frac{1}{12}^d = 2^h$.

ДОЛ-005) Чистовик. Лист 2 из 5

№3 (продолж).

За один год рождается $160\cdot10^6$ детей $\Rightarrow$ за 2 часа родится $N = \frac{2^h}{1^г}\cdot 160\cdot10^6 = \frac{2^h}{365\cdot 24^h}\cdot 160\cdot10^6 = \frac{160\cdot10^6\cdot 2}{365\cdot 24} = \frac{\cancel{160}^{40}\cdot10^6}{365\cdot\cancel{12}_{3}} =$

$= \frac{40\cdot10^6}{365\cdot3}$, $365\approx360$

$N\approx\frac{40\cdot10^6}{\cancel{360}_{9}\cdot3} = \frac{10^6}{27} = \frac{100\cdot10^4}{27}\approx \boxed{3740-3750\text{ детей}}$

№4

Пусть $R(t) = K\cdot E^{1/5}\cdot t^{2/5}$, k - какой-либо коэф.

$R_1(t) = k\cdot E_1^{\frac15}\cdot t^{2/5}$

$R_2(t) = k\cdot(E_1\cdot32)^{\frac15}\cdot t^{2/5}$ время одинаковое, тк они встретятся

$t^{\frac25} = \frac{R_1}{\cancel{k\cdot E_1^{1/5}}} = \frac{R_2}{\cancel{k\cdot E_1^{1/5}}\cdot 32^{1/5}} \Rightarrow R_1 = \frac{R_2}{32^{1/5}} = \frac{R_2}{\sqrt[5]{32}} = \frac{R_2}{2}$

$R_2 = 2R_1.$

$R_1 + R_2 = 300$ пк

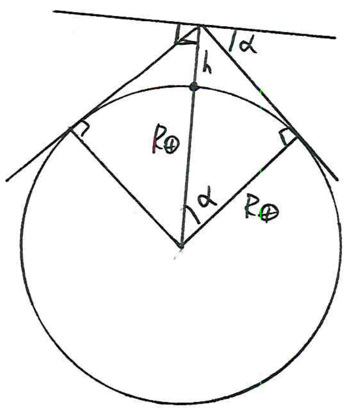
$R_1 + 2R_1 = 300$ пк $\Rightarrow$ $3R_1 = 300$ пк $\Rightarrow$ $R_1 = 100$ пк

$\boxed{R_2 = 200 \text{ пк}}$

это и будет расстоянием от более мощной звезды

№5

Оценим понижение горизонта:



$\alpha = \arccos\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}\right) = \arccos\left(\frac{6400\cdot10^3 м}{6400\cdot10^3 м + 442 м}\right) =$

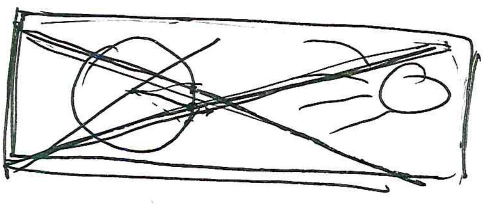
$= \arccos\left(\frac{6400\,000}{6400\,442}\right)$

$\frac{6400000}{6400442} \approx \frac{6400000}{6400500} = \frac{1}{\frac{6400500}{6400000}} =$

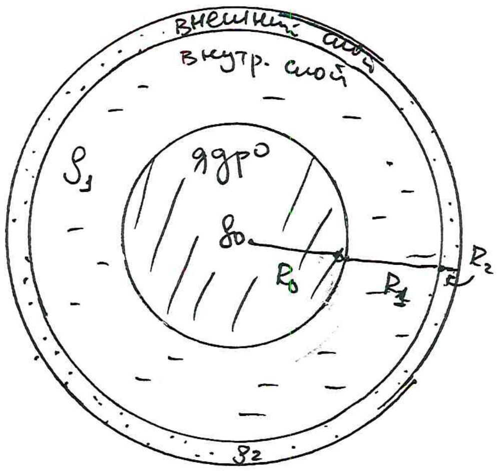
$= \frac{1}{\frac{12801}{12800}} = \frac{1}{\frac{12800+1}{12800}} = \frac{1}{1+\frac{1}{12800}} =$

$\approx \frac{1}{1+0{,}000078} = \frac{1}{1{,}000078} \approx \frac{1}{1{,}00008}$

$\arccos\left(\frac{1}{1{,}00008}\right) \simeq 0{,}5°$



№2



Нам нужно понять, какую часть от радиуса составляет внешний слой. Его плотность в 5 раз меньше внутр. слоя, к тому же сказано, что внутр слой занимает до 70% $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ будем считать, что в среднем

$R_0 = 0{,}3R$ – ядро

$R_1 = 0{,}69R$ – внутр. слой (69%)

$R_2 = 0{,}01R$ – внешний слой ($\approx 1\%$)

Ядро: $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4}{3}\pi(0{,}3R)^3$

$m_0 = \rho_0 V_0$

Внутр. слой: $V_1 = \frac{4}{3}\pi\cdot(0{,}99R)^3 - \frac{4}{3}\pi\cdot(0{,}3R)^3 = \frac{4}{3}\pi\left((0{,}99R)^3 - (0{,}3R)^3\right)$

$m_1 = \rho_1 V_1$

Внешний слой: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(0{,}99R)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - (0{,}99R)^3\right)$

$m_2 = \rho_2 V_2$

$$\rho_{ср} = \frac{m_0 + m_1 + m_2}{V_0 + V_1 + V_2} = \frac{\rho_0\cdot V_0 + \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_0 + V_1 + V_2}.$$

Мы хотим найти плотность ядра ρ_0:

$$\rho_0 V_0 + \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho_{ср}(V_0 + V_1 + V_2)$$

$$\rho_0 = \frac{\rho_{ср}(V_0 + V_1 + V_2) - \rho_1 V_1 - \rho_2 V_2}{V_0} = \frac{\cancel{\tfrac{4}{3}\pi}\,\rho_{ср}\cdot R^3 - \cancel{\tfrac{4}{3}\pi}\,\rho_1\left((0{,}99R)^3 - (0{,}3R)^3\right) - \cancel{\tfrac{4}{3}\pi}\,\rho_2\left(R^3 - (0{,}9\ldots\right.}{\cancel{\tfrac{4}{3}}\pi(0{,}3R)^3}$$

$$= \frac{\rho_{ср}\cdot R^3 - \rho_1\left((0{,}99R)^3 - (0{,}3R)^3\right) - \rho_2\left(R^3 - (0{,}99R)^3\right)}{(0{,}3R)^3} = \frac{\rho_{ср} - \rho_1(0{,}99^3 - 0{,}3^3) - \rho_2(1 - 0{,}99^3)}{0{,}3^3} =$$

$$= \frac{\rho_{ср} - 0{,}965189\cdot\rho_1 - 0{,}007811\rho_2}{0{,}027} = \frac{1530 - 0{,}965189\cdot 3000 - 0{,}007811\cdot 600}{0{,}027} \approx$$

$$\approx \frac{1530 - 0{,}965\cdot 3000 - 0{,}008\cdot 600}{0{,}027} < 0.$$

Однако видим, что в таком предположении $\rho_0 < 0$, чего не м.б.

(см. продолж. на листе 5)

ЛОЛ-005. Чистовик. Лист 4   у. 5

№2 (продолж.)

Попробуем оценить α, при котором $\rho_0 \geq 0$ ($R_2 = \alpha R$)

$$\rho_0 = \frac{\rho_{ср} - \rho_1((1-\alpha)^3 - 0{,}3^3) - \rho_2(1-(1-\alpha)^3)}{0{,}3^3} \geq 0$$

$$\rho_{ср} - \rho_1(1-\alpha)^3 + 0{,}027\rho_1 - \rho_2 + \rho_2(1-\alpha)^3 \geq 0$$

$$(1-\alpha)^3(\rho_1 - \rho_2) \leq \rho_{ср} + 0{,}027\rho_1 - \rho_2$$

$$(1-\alpha)^3 \leq \frac{\rho_{ср} + 0{,}027\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$$

$$(1-\alpha)^3 \leq \frac{1530 - 600 + 81}{3000 - 600}$$

$$1-\alpha \leq \sqrt[3]{\frac{1011}{2400}} = \frac{\sqrt[3]{1011}}{\sqrt[3]{2400}} \approx \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{2{,}4}\cdot\sqrt[3]{1000}} \approx \approx \frac{1}{1{,}35} = \approx 0{,}74$$

$$\alpha \geq 1 - 0{,}74 \Rightarrow \underline{\alpha \geq 0{,}26}.$$

Пусть $\alpha \approx 0{,}3$ (для оценки плотности этого достаточно + к тому же α не должно быть очень большое):

$$\rho_0 = \frac{\rho_{ср} - \rho_1(0{,}7^3 - 0{,}3^3) - \rho_2(1-0{,}7)^3}{0{,}3^3} = \frac{1520 - 3000(0{,}343 - 0{,}027) - \rho_2(1 - 0{,}343)}{0{,}027} =$$

$$= \frac{1520 - 3000\cdot 0{,}316 - 600\cdot 0{,}657}{0{,}027} = \frac{1520 - 948 - 394{,}2}{0{,}027} = \frac{177{,}8}{0{,}027} =$$

$$\approx \boxed{6590 \text{ кг/м}^3}$$

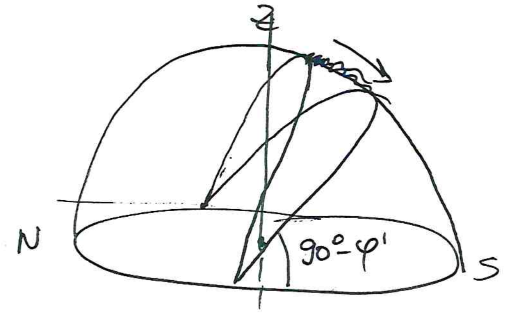
№5 (продолж.)

Для наблюдателя на „Бурдж-Халифе" Солнце будет восходить раньше и заходить позже $\Rightarrow$ продолжительность дня увеличится. Допустим, что для этого наблюдателя широта как бы изменилась (тк эта картина наблюдалась бы на широте $\varphi' = \varphi \pm 1°$). Рассматриваем день летнего солнцестояния ~~(…)~~ либо можно рассматривать день ЗС, тк в эти дни различие больше всего. ~~…~~), $\varphi' = \varphi + 1° = 26°$.

При наличии калькулятора, разницу можно было бы оценить как разницу часовых углов захода. $T_{нач} = 24^h \Rightarrow \Delta T_{нач} = 2\Delta t_\downarrow = 2\cdot(\arccos(-\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\delta) - \arccos(-\operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\delta))$

N5 (продолж).

Однако без калькулятора это затруднительно.
Рассмотрим небесную сферу с уменением широты:



Т.к. широта увеличивается, то 90-φ уменьшается ⇒ ⇒ часть дуги над горизонтом увеличивается

N3

В среднем продолжительность солнечного затмения 8 минут.
За это время успеет родиться $N = \frac{8^{min}}{1^{year}} \cdot 160 \cdot 10^6$ детей, т.е.

$$\frac{\cancel{8}^{\,1} \cdot \cancel{160}^{\,40} \cdot 10^6}{365 \cdot \cancel{24}_{3} \cdot \cancel{60}_{15}} = \frac{40 \cdot 10^6}{365 \cdot 15} \approx \frac{\cancel{40} \cdot 10^6}{\cancel{360}_{9} \cdot 15} = \frac{10^6}{9 \cdot 15} = \frac{10^6}{1350} = \frac{10^5}{135} \approx \boxed{74\text{-}75 \text{ детей}}$$