САМ-01

N2

1

Пусть плотность ядра этой планеты – ρ_x, внутреннего слоя – $\rho_1 = 3000 \frac{кг}{м^3}$, внешнего – $\rho_2 = 600 \frac{кг}{м^3}$; радиус планеты – R. Тогда ~~...~~ объём ядра равен $V_1 = \frac{4}{3}\pi(0,3R)^3$; внутреннего слоя – $V_2 = \frac{4}{3}\pi(0,7R)^3 - \frac{4}{3}\pi(0,3R)^3$; внешнего – $V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(0,7R)^3$; всей планеты – $\frac{4}{3}\pi R^3 = V$. Тогда по определению средняя плотность планеты (m – её масса):

$$\rho_{ср} = \frac{m}{V} = \frac{\rho_x V_1 + \rho_1 V_2 + \rho_2 V_3}{V} = \frac{\rho_x \cdot \frac{4}{3}\pi(0,3R)^3 + \rho_1\left(\frac{4}{3}\pi(0,7R)^3 - \frac{4}{3}\pi(0,3R)^3\right) + \rho_2\left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(0,7R)^3\right)}{\frac{4}{3}\pi R^3} =$$

$$= \frac{\rho_x \cdot 0,3^3 R^3 + \rho_1(0,7^3 - 0,3^3)R^3 + \rho_2(1^3 - 0,7^3)R^3}{R^3} =$$

$$= \rho_x \cdot 0,3^3 + \rho_1(0,7^3 - 0,3^3) + \rho_2(1 - 0,7^3).$$ Выражаем ρ_x:

$$\rho_x = \frac{\rho_{ср} - \rho_1 \cdot 0,7^3 + \rho_1 \cdot 0,3^3 - \rho_2 + \rho_2 \cdot 0,7^3}{0,3^3} = \frac{(\rho_{ср} - \rho_1 \cdot 0,7^3 - \rho_2 + \rho_2 \cdot 0,7^3)}{0,027} + \rho_1 =$$

$$= \frac{1530 \frac{кг}{м^3} - 3000 \frac{кг}{м^3} \cdot 0,343 - 600 \frac{кг}{м^3} + 600 \frac{кг}{м^3} \cdot 0,343}{0,027} + 3000 \frac{кг}{м^3} = \frac{1530 - 1029 - 600 + 205,8}{0,027}\left(\frac{кг}{м^3}\right) +$$

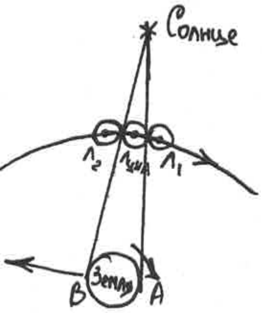
$$+ 3000 \frac{кг}{м^3} = \frac{106,8 \frac{кг}{м^3}}{0,027} + 3000 \frac{кг}{м^3} \approx 3956 \frac{кг}{м^3} + 300 \frac{кг}{м^3} = 6956 \frac{кг}{м^3}.$$

N4.

По условию $R \sim E^{1/5} t^{2/5}$, значит, $R \sim \sqrt[5]{E t^2}$. Чтобы превратить пропорциональность в равенство, возьмём за k некоторый постоянный коэффициент, для которого можно сказать, что $R = k\sqrt[5]{E t^2}$. Если две сверхновые вспыхнули одновременно, причём 1 из них была в 32 раза мощнее другой, то время распространения фронтов ударных волн звёзд одинаково, а энергии взрыва отличаются в 32 раза: $\frac{E_1}{E_2} = 32$; $t_1 = t_2 = t$. Тогда за время t оба фронта преодолеют суммарно расстояние между звёздами: в момент встречи радиусы сфер в сумме дают расстояние между звёздами $R_1 + R_2 = 300$ пк. ~~Ес~~ Тогда $\frac{E_1}{E_2} = 32$; $t_1 = t_2 = t \Rightarrow$ $R_1 = k\sqrt[5]{E_1 t_1^2} =$, $R_2 = k\sqrt[5]{E_2 t_2^2} =$

$$\begin{cases} R_1 = k\sqrt[5]{32 E_2 t} = k \cdot 2\sqrt[5]{E_2 t} \\ R_2 = k\sqrt[5]{E_2 t} \end{cases} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 2,$$ или $R_1 = 2R_2$. Тогда $R_1 + R_2 = 2R_2 + R_2 = 3R_2 = 300$ пк $\Rightarrow$

$R_2 = \frac{300 пк}{3} = 100$ пк $\Rightarrow R_1 = 2R_2 = 2 \cdot 100$ пк $= 200$ пк.



N3.

Определим время (длину) одного солнечного затмения:

1) Определим видимую скорость Луны в небе Земли. Для этого определим её синодический период: $\frac{1}{S} = \frac{1}{T_З} - \frac{1}{T_Л} \Rightarrow$

$$S = \frac{T_З T_Л}{T_Л - T_З} = \frac{27,3 \text{ сут} \cdot 0,997 \text{ сут}}{27,3 \text{ сут} - 0,997 \text{ сут}} \approx \frac{27,2 \text{ сут}^2}{26,3 \text{ сут}} \approx 1,03 \text{ сут} =$$

$= 1,03 \cdot 86400 \text{ с} = 88992 \text{ с}$. Тогда ~~скорость~~ Луна в небе Земли проходит 360° за 88992 с, откуда скорость Луны в небе Земли равна

$v_Л = \frac{360°}{88992 \text{ с}} \approx 0,00405°/\text{с} = 0,243°/\text{мин}$. ($T_З = 0,997$ сут – сидерич. период Земли, 23 ч 56 мин 04 с)

2) Определим видимую скорость Солнца по земному небу. ~~Оборот Земли~~ Оно проходит 360° и возвращается на прежнее место за 23 ч 56 мин 4 с = 86164 с, отсюда его скорость $v_С = \frac{360°}{86164 \text{ с}} \approx 0,0042°/\text{с} = 0,252°/\text{мин}$.

3) В небе ~~Лун~~ Земли Луна и Солнце двигаются в одинаковом направлении: с востока на запад, причём $v_С > v_Л \Rightarrow$ Солнце сначала „догоняет" Луну, потом „прячется" за ней, а затем „убегает" от неё. Тогда скорость Солнца относительно Луны $v = v_С - v_Л = 0,252°/\text{мин} - 0,243°/\text{мин} = 0,009°/\text{мин} = 0,54°/\text{час}$, а пройти за время затмения Солнце

должно ~~2 диаметра видимых~~ в сумме 2 своих диаметра $\beta = 0,5°$ относительно Луны, т. е. $2\beta = 1°$. Тогда время, в течении которого затмение видно хоть из 1 точки Земли (от точки A до точки B) равно $\frac{1°}{0,54°/\text{час}} \approx 1,85$ часа.

За год на Земле рождается $160 \cdot 10^6$ детей, пусть за 1,85 ч рождается x (будем считать, что все дети рождаются равномерно в течение года), тогда

$\frac{160 \cdot 10^6}{1 \text{ год}} = \frac{x}{1,85 \text{ ч}}$ 1 год = 365,25 сут = 365,25 · 24 ч = 1461 ч $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1,85 \text{ ч} \frac{160 \cdot 10^6}{1461 \text{ ч}} \approx 0,2026 \cdot 10^6 = 2,026 \cdot 10^3 = 202600$ детей рождается за время 1 полного солнечного затмения.

N 1

Длина экватора планеты равна $L = 60\,000$ км, отсюда радиус планеты R: $L = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{L}{2\pi} = \frac{60000 \text{ км}}{2\pi} \approx 9554$ км. Если на планетах одинаковы силы тяжести, то и ускорения свободного падения на поверхности одинаковы. Отсюда $g = \frac{GM}{R^2}$, где M – масса планеты, G – гравитационная постоянная, $\Rightarrow M = \frac{gR^2}{G} = \frac{9{,}8 \text{ м/с}^2 \cdot (3\cdot 10^{7})^2 \text{ м}^2}{\pi^2 \cdot 6{,}67\cdot 10^{-11} \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}} \approx 1{,}35\cdot 10^{25}$ кг.

По III закону Кеплера для нового спутника планеты: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

По условию период обращения спутника равен периоду обращения Луны; отсюда $T = T_Л = 27{,}3$ сут $\Rightarrow$ сможем определить ~~расстоя~~ необходимое расстояние будущего спутника от планеты: ~~$a^3 = \frac{T^2 GM}{4\pi^2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}}$~~

~~$a = \sqrt[3]{\frac{(27{,}3 \cdot 86400)^2 \cdot 6{,}67\cdot 10^{-11} \cdot 1{,}35\cdot 10^{25}}{4\pi^2}}$~~ Запишем то же для Луны:

$\frac{T_Л^2}{a_Л^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus}$. Отсюда $\frac{\frac{T^2}{a^3}}{\frac{T_Л^2}{a_Л^3}} = \frac{M_\oplus}{M} = \frac{5{,}97\cdot 10^{24}}{1{,}35\cdot 10^{25}} = 4{,}42 \Rightarrow$

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_Л^2}{a_Л^3} \cdot 4{,}42$. $T = T_Л$ по условию $\Rightarrow$ можно разделить на него обе части и получить $\frac{1}{a^3} = \frac{4{,}42}{a_Л^3} \Rightarrow a^3 = \frac{a_Л^3}{4{,}42} \Rightarrow a = \frac{a_Л}{\sqrt[3]{4{,}42}} \approx$

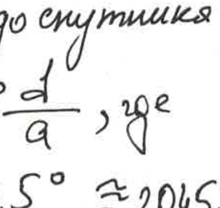
$\approx \frac{384\,400 \text{ км}}{1{,}64} \approx 234390$ км $\approx 234\,400$ км — расстояние до спутника от планеты. Видимые размеры спутника (диаметр): $\beta = 57{,}3^\circ \frac{d}{a}$, где

d – диаметр спутника $\Rightarrow d = a \cdot \frac{\beta}{57{,}3^\circ} = 234\,400 \text{ км} \cdot \frac{0{,}5^\circ}{57{,}3^\circ} \approx 2045{,}3$ км.

N 5

1) ~~Максималь~~ В течение года солнце меняет своё склонение δ. Максимальная разница возможна в дни „крайних" его положений $\Rightarrow$ она либо в день летнего солнцестояния, когда $\delta = 23^\circ 26'$, либо в день зимнего, когда $\delta = -23^\circ 26'$.

2) Разница в дальности горизонта создает разницу во времени светового дня, если $h = 442$ м, $R_\oplus$ – радиус Земли, то



$\cos\alpha$ (см рис): $\cos\alpha = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} =$

$= \sqrt{1-\left(\frac{R}{R+h}\right)^2}$; $\sin\alpha = \frac{\ell}{R} = R\sin\alpha = R\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+h}\right)^2}$ и так же для пр. собора. и аналогично для человека на уровне моря.