ЖЕЛ-13

Задача 1:

1) Найдём изменение орбиты в большую сторону:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \cdot \alpha = \sqrt{\frac{GM}{r_1} \cdot \frac{1+e}{1-e}}$$, где v - скорость движ. аппарата.

r_0 - геостационарная орбита; $\alpha = 1,1$,

r_1 - радиус промежуточной орбиты

e - эксцентриситет промеж. орбиты, отсюда

$$e = \alpha^2 - 1 = 0,2$$

$$r_1 = r_0 \frac{1+e}{\alpha^2(1-e)} ; \; r_1 \approx \frac{5}{4} r_0$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_1} \cdot \frac{1-e}{1+e}} \cdot \beta = \sqrt{\frac{GM}{r_K}}$$, где $\beta = 0,9$,

r_K - радиус получившейся орбиты, отсюда

$$r_K = r_1 \cdot \frac{1+e}{\beta^2(1-e)} ; \; r_{K_1} \approx 2,3 r_0.$$

2) Найдём изменение орбиты в меньшую сторону: аналогично

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \beta = \sqrt{\frac{GM}{r_1} \cdot \frac{1-e}{1+e}}$$, отсюда

$$e = 1 - \beta^2 ; \; e \approx 0,2$$

$$r_1 = r_0 \frac{1-e}{\beta^2(1+e)} ; \; r_1 \approx \frac{5}{6} r_0$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_1} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \alpha = \sqrt{\frac{GM}{r_K}}$$, отсюда

$$r_{K_2} = r_1 \frac{1-e}{\alpha^2(1+e)} ; \; r_{K_2} \approx 0,5 r_0$$

3) Найдём разность периодов из 3 закона Кеплера:

$$\left(\frac{T_{1,2}}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{a_{1,2}}{a_0}\right)^3 ; \quad T_{1,2} = T_0 \cdot \left(\frac{r_{1,2}}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}} ; \quad T_2 - T_1 = \Delta T ;$$

$$\Delta T = \left[\left(\frac{r_{K.1}}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r_{K.2}}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \cdot T_0$$, где $T_0 = 24^h$

$$\Delta T \approx 72^h$$

Ответ: 72 часа

Жел-13

Задача 3.

1) Т.к. звезда принадлежит гл. последовательности, то

$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4$; $L = 16 L_\odot$, где $L_\odot$ - светимость Солнца

2) Из 3 обобщенного закона Кеплера найдём радиус орбиты:

$MT^2 = a^3$; $a = \sqrt[3]{MT^2}$; $a \simeq 3{,}2$ а.е.

3) Сравнивая с системой Солнце-Земля, найдём поток энергии от звезды на расстоянии планеты:

$\frac{j}{j_\odot} = \frac{L}{L_\odot} \cdot \left(\frac{a_\odot}{a}\right)^2$, где $a_\odot = 1$ а.е.

$j \simeq \cancel{1}{,}7\, j_\odot$, где $j_\odot = 1360$ Вт/м^2

$j = 2200$ Вт/м^2

4) Найдём искомое количество энергии:

$A = j \cdot S \cdot \eta \cdot \frac{t}{2} \cdot \alpha$, где $\eta = 10\%$ (эффективность)

$\alpha = \frac{1}{2}$ (из-за того, что планета вращается, появляется множитель $\cos\varphi$, интегрируя за время, равное полупериоду, получаем примерно $\frac{1}{2}$)

$\frac{t}{2}$ - полупериод обращения (т.к. радиус орбиты планеты велик, можно не учитывать вклад угловой скорости планеты)

$A \simeq 2 \cdot 10^7$ Дж.

Ответ: $2 \cdot 10^7$ Дж.

Жел-13

Задача 2:

1) Найдём часовой угол Сириуса:

$S=\alpha_\odot+t_\odot$, где S - зв. время, $t_\odot$ - часовой угол Солнца

$\alpha_\odot$ - пр. восх. Солнца

$t_\odot\approx-12^h$ (не учитывая ур. времени)

$\alpha_\odot=\dfrac{(N-81)\cdot 360^\circ}{365{,}25}$, где N - день в году

$\alpha_\odot\approx-80^\circ$

$S\approx-260^\circ$

$S=\alpha+t$; $t=S-\alpha$; $t\approx-360^\circ\approx0$, значит звезда наблюдается на небесном меридиане

2) Найдём возможные высоты звезды:

$h_{верх}=\delta+90^\circ-\varphi$; $h_{верх}\approx45^\circ$

$h_{ниж}=-90^\circ+\varphi+\delta$; $h_{ниж}=-79^\circ$, значит Сириус находится в верхней кульминации.

3) Понятно, что при ходьбе в сторону экватора, ~~эта~~ толщина атмосферы станет тоньше, а звезда ярче. Рассмотрим изменение в период 30^s: $m=m_0+\dfrac{E}{\sin h}$, где h - высота светила, $E=0{,}2^m$, m_0 - ист. зв. велич, m - видимая зв. велич.

$\Delta m=E\left(\dfrac{1}{\sin(h+\Delta h)}-\dfrac{1}{\sin h}\right)\approx$

$\approx E\left(\dfrac{1}{\sin h+\cos h\cdot dh}-\dfrac{1}{\sin h}\right)=$

$=-E\cdot\dfrac{\cos h\cdot dh}{\sin^2 h+\sin h\cdot\cos h\cdot dh}$

Жел-13

4) Найдём dh:

За 30^s пешеходы пройдут 30 м.

111 км земного меридиана соответствуют 1°, значит $dh \approx (3\cdot10^{-4})^\circ$

5) Найдём Δm:

$$\Delta m = -E\cdot\frac{\cos h\cdot dh}{\sin^2 h + \sin h\cdot\cos h\cdot dh}$$

$$\Delta m \approx (-8\cdot10^{-5})^m.$$

Можно было рассматривать более длинные промежутки времени, но тогда звезда уйдёт с небесного меридиана и расчёты у сильно усложнятся.

Ответ: $(-8\cdot10^{-5})^m$ за 30 с.

Задача 4:

1) Предположим, что ближе к нам расположена звезда, а расстояние между туманностью и звездой пренебрежимо мало в сравнении с расстояние до Солнца.

Абсолютная величина шарообразных туманностей примерно $+8^m$. В таком случае, без учёта подсветки от звезды, видимая зв. величина туманности составит $8^m + 5^m,7 - (-2^m,5) \approx$
$\approx 15^m$

Понятно, что даже учитывая звезду и предполагая высокое альбедо туманности, энергии от звезды не хватит, чтобы сравнять видимые зв. величины.

Жел-13

Из 1 пункта ясно, что ближе к нам находится туманность.

г) Запишем равенство энергий от туманности и звезды:

$$j_T = j_*$$

$$J_T \cdot \frac{1}{4\pi r_T^2} + J_* \cdot \frac{1}{4\pi \Delta r^2} \cdot \pi R_T^2 \cdot A \cdot \frac{1}{4\pi r_T^2} = J_* \cdot \frac{1}{4\pi r_*^2}, \text{ где}$$

J_T - светимость туманности

J_* - светимость звезды, R_T - радиус туманности

r_T - расстояние до туманности

r_* - расстояние до звезды, A - альбедо туманности.

Δr - расстояние между звездой и туманностью

Т.к. $\Delta r = r_* - r_T$, то уравнение примет вид:

$$\frac{J_* \cdot A \cdot R_T^2}{16\pi \Delta r^2 (r_* - \Delta r)^2} + \frac{J_T}{4\pi (r_* - \Delta r)^2} = \frac{J_*}{4\pi r_*^2}$$

По закону Погсона $\frac{J_*}{J_T} = 10^{0,4(M_T - M_*)}$, значит

$$\frac{J_*}{J_T} = 10^{0,4(10-(-2,5))} \simeq 10^5, \text{ тогда}$$

пусть $\alpha = 10^5$;

$$\frac{\alpha \cdot A \cdot R_T^2}{16\pi (r_* - \Delta r)^2 \cdot \Delta r^2} + \frac{1}{4\pi (r_* - \Delta r)^2} = \frac{\alpha}{4\pi r_*^2} \quad \Big| : \frac{1}{4\pi}$$

$$\frac{\alpha A R_T^2}{4\Delta r^2 (r_* - \Delta r)^2} + \frac{4\Delta r^2}{4\Delta r^2 (r_* - \Delta r)^2} = \frac{\alpha}{r_*^2}$$

Предположим, что $\Delta r << r_*$, тогда

$$\frac{\alpha A R_T^2 + 4\Delta r^2}{4\Delta r^2 \cdot r_*^2} = \frac{\alpha}{r_*^2}$$

$$\Delta r^2 = \frac{\alpha A R_T^2 \cdot r_*^2}{4 r_*^2 (\alpha - 1)} \approx \frac{A R_T^2 r_*^2 \cdot \alpha}{4 r_*^2 \cdot \alpha} \approx \left(\frac{R_T}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

Жел-13

Получается, что звезда находится на границе туманности, радиус которой составляет около 50 а.е.

Ответ: 50 а.е.

Задача 5:

1) Из закона Стефана-Больцмана найдём температуру звезды:

$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, где L - светимость,

R - радиус

T - температура

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi\sigma R^2}} \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ Вт/(м^2 \cdot K^4)$$

$T \simeq 2 \cdot 10^7\ K.$

2) Найдём частоту излучения:

$E = h\nu;\ \nu = \frac{E}{h}$, где h - постоянная Планка

3) Пусть $B = \sqrt{\alpha} r^{-3}$, где α - некий коэффициент, тогда

$p = k\alpha \cdot r^{-6}$

4) Найдём динамическое давление вещества:

$$p = \frac{F}{ds} = \frac{GM\,dm}{r^2\,ds} = \frac{GM\,dm \cdot dh}{r^2 \cdot ds \cdot dh} = \frac{GM}{r^2} \cdot \rho \cdot dh$$, значит

среднее давление $p = \frac{GM \cdot r_x}{r^2 \cdot \rho \cdot 2}$, где r_x - искомый радиус