С110-172

1. Дано

~~Из~~

$\mathcal{E} = \frac{1}{2} E_0 = 10^{55}$ Дж

• $\exists n \in N: n \cdot M_\odot = M$, где n - кол-во необходимых звёзд (похожих на Солнце => $\exists$ их масса = $M_\odot$ (M солнца))

$M_\odot$ - масса солнца

M - аккрецирующая масса.

• по условию: $\mathcal{E} = \frac{1}{2} E_0$, где $\mathcal{E}$ - энергия, выделившаяся в виде излучения;

E_0 - энергия покоя аккрецирующей массы. =>

• $E_0 = Mc^2$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} c^2 \cdot n \cdot M_\odot$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2\mathcal{E}}{c^2 M_\odot} = \frac{2 \cdot 10^{55}}{3^2 \cdot 10^{16} \cdot 2 \cdot 10^{30}} = \frac{10^{9}}{32} \approx \cancel{10^{7}}\, 10^8$$

$c = 300\,000 \frac{км}{с} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$

$M_\odot = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг $\cancel{= 1{,}98 \cdot 10^{33}\ г} \simeq 2 \cdot 10^{30}$ кг

Ответ: Около 10^8 звёзд, похожих на Солнце, должны были бы упасть на эту чёрную дыру.

4. Дано

$T = \frac{1}{60} T_м$ $\cancel{= \frac{1}{60} \cdot 0{,}24...}$

$R_к = R_\oplus = 6400$ км

ср $\rho_к = 9 \cdot 10^8$ кг$\cdot$м$^{-3}$

Решение

III з-н Кеплера: $\frac{T_1^2 (M_1 + m_1)}{T_2^2 (M_2 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$

1) Найдем T Меркурия:

~~Для Солнечной~~

Земля и Меркурий вращаются вокруг Солнца

=> для них верно (по III з-ну Кеплера)

$$\frac{a_м^3}{T_м^2} = \frac{a_\oplus^3}{T_\oplus^2} \cancel{= \frac{(1 а.е.)^3}{(1 год)^2}}$$

$a_\oplus = 1$ а.е.

$T_\oplus = 1$ год

$a_м = 0{,}4$ а.е.

$$=> T_м = \sqrt{\frac{a_м^3 \cdot T_\oplus^2}{a_\oplus^3}} = \sqrt{\frac{0{,}4^3 \cdot \cancel{1} 1^2}{1^3}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3} (лет)$$

#2) применим III з-н Кеплера:

к системам Меркурий - Солнце; Планета - белый карлик

$M = \rho_к \cdot V_к = \rho_к \cdot \frac{3}{4} \pi R_к^3 = \rho_к \cdot \frac{3}{4} \pi R_\oplus^3$ (1)

и пренебрежём массами планет, тогда:

$$\frac{T^2 \cdot M_к}{T_м^2 \cdot M_\odot} = \frac{a^3}{a_м^3} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\frac{1}{3600} T_м^2 \cdot \frac{3}{4} \pi R_\oplus^3 \cdot \rho_к}{T_м^2 \cdot M_\odot} =$$

$$= \frac{a^3}{a_м^3} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3 \pi R_\oplus^3 \cdot \rho_к \cdot a_м^3}{3600 \cdot 4 \cdot M_\odot}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3\cdot \cancel{4\pi}\, 3{,}14\cdot \cancel{3}\,6400^3\cdot 9\cdot 10^8\cdot 10^9\cdot 0{,}4^3\cdot 1{,}5^3\cdot 10^{24}}{3600\cdot 4\cdot 1{,}98\cdot 10^{30}}} = 2^2\sqrt[3]{2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{3^2}\cdot 10^4 \approx 36\cdot 10^4 \text{ км}$$

— большая полуось орбиты планеты.

по условию M красного г. $= 2\cdot M$ белого к.

$\Rightarrow$ по III з-н Кеплера: $\dfrac{T_1^2\cdot M}{T_2^2\cdot 2M} = \dfrac{a_1^3}{a_2^3} = 1$ ($a_1 = a_2 = a$ по условию)

$$\Leftrightarrow \quad T_2 = \sqrt{\frac{T_1^2}{2}\cdot \cancel{a}} = \frac{T_1}{\sqrt{2}} = \frac{7м}{60\sqrt{2}} = \frac{2}{300\sqrt{5}} \text{ лет.}$$

Проверим возможность существования:

$$v = \frac{2\pi a}{T_2} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 36\cdot 10^4\cdot 300\cdot \cancel{\sqrt{5}}}{2\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\cdot \cancel{\sqrt{5}}} << c \text{ (скорость света)}$$

$R_{красного\ г.} << a$

$\Rightarrow$ такая планета могла существовать

5. Дано

$M = M_\odot\cdot 4$

$a = 4$ а.е.

$m = 3\cdot 10^{24}$ кг

$r = 400\cdot 10^3$ км

$R = 800$ км

S?

Необходимо найти синодический период обращения спутника вокруг планеты:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_п} + \frac{1}{T_c}$$

по III з-ну Кеплера найдем T планеты:
(сравним с системой Земля - Солнце)

$$\frac{T_п^2\cdot M_\odot\cdot 4}{T_\oplus^2\cdot M_\odot} = \frac{a^3}{a_\oplus^3}$$

$$\Rightarrow T_п = \sqrt{\frac{a^3\cdot T_\oplus^2\cdot M_\odot}{a_\oplus^3\cdot M_\odot\cdot 4}} = \sqrt{\frac{a^3\cdot T_\oplus^2}{a_\oplus^3\cdot 4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4^3\cdot 1^2}{1^3\cdot 4}} = 4 \text{ года.}$$

по аналогии:

$$T_c = \sqrt{\frac{r^3\cdot T_\oplus^2\cdot M_\odot}{a_\oplus^3\cdot m}} = \sqrt{\frac{400\cdot 10^3\cdot 1^2\cdot 2\cdot 10^{30}}{(1{,}5\cdot 10^8)^2\cdot 3\cdot 10^{24}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2^3\cdot 10^5\cdot 10^{30}\cdot 2^2}{3^2\cdot 10^{24}\cdot 3\cdot 10^{24}}} = \cancel{\sqrt{\frac{1}{10^{13}}}}$$