Задача 1.

Изначально $R = 40\,000$ км; $T = 24$ ч; $v = \frac{2\pi R}{T}$ ОМС-2

~~Когда~~ Как планировалось:

~~на~~ точка первого манёвра станет перигеем ~~новой~~ промежут. орбиты(п), тогда $v_{п\,перич.} = \sqrt{\frac{GM}{a_п}\cdot\frac{1+e_п}{1-e_п}} = \sqrt{\frac{GM}{R}\cdot(1+e_п)}$, т.к. во время манёвра спутник на рас-нии R от Земли.

При этом $v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow \frac{v_{п\,перич}}{v} = \sqrt{1+e_п} = 1{,}1$ (по усл.)

$\sqrt{1+e_п} = 1{,}1 \Rightarrow 1+e_п = 1{,}21 \Rightarrow e_п = 0{,}21 \Rightarrow a_п = \frac{R}{1-e_п} = \frac{R}{0{,}79}$

~~Тогда~~ Тогда второй манёвр происходит в апогее промежут. орбиты и уменьшает скорость, значит эта точка останется апогеем новой орбиты(н).

Тогда $v_{н\,апог.} = \sqrt{\frac{GM}{a_н}\cdot\frac{1-e_н}{1+e_н}} = \sqrt{\frac{GM\cdot(1-e_н)}{a_п\cdot(1+e_п)}}$, т.к. $a_п\cdot(1+e_п) = a_н(1+e_н)$,

При этом $v_{п\,апог} = \sqrt{\frac{GM}{a_п}\cdot\frac{1-e_п}{1+e_п}} \Rightarrow \frac{v_{н\,апог}}{v_{п\,апог}} = \sqrt{\frac{1-e_н}{1-e_п}} = 0{,}9$ (по усл.) ведь апогеи совпадают

$\sqrt{\frac{1-e_н}{1-e_п}} = 0{,}9 \Rightarrow 1-e_н = 0{,}81\cdot(1-e_п)$

$e_н = 1-0{,}81\cdot 0{,}79 \approx 1-0{,}64 = 0{,}36$, тогда

$a_п\cdot(1+e_п) = a_н\cdot(1+e_н) \Rightarrow a_н = a_п\cdot\frac{1+e_п}{1+e_н} = \frac{R}{0{,}79}\cdot\frac{1{,}21}{1{,}36}$

$a_н = R\cdot\frac{\cancel{0{,}79}\cdot 1{,}21}{1{,}36\cdot 0{,}79}$, тогда согласно 3-му з-ну Кеплера:

~~но~~ $T_н = T\cdot\sqrt{\frac{a_н^3}{R^3}} = T\cdot\sqrt{\left(\frac{1{,}21}{0{,}79\cdot 1{,}36}\right)^3}$

Это что ожидалось

А вот что произошло:

точка первого импульса стала ~~перигеем~~ апогеем промеж. орб.:

$$v_{\text{п апог}} = \sqrt{\frac{GM}{a_п} \cdot \frac{1-e_п}{1+e_п}} = \sqrt{\frac{GM \cdot (1-e_п)}{R}} \Bigg| \Rightarrow \frac{v_{\text{п апог}}}{v^0} = \sqrt{1-e_п} = 0{,}9$$

$$v^0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$1-e_п = 0{,}81$$

$$e_п = 0{,}19$$

$\cancel{a_п = R\cdot(1+e_п) = R\cdot 1{,}19}$ $a_п\cdot(1+e_п) = R \Rightarrow a_п = \frac{R}{1{,}19}$

точка второго импульса стала перигеем новой орбиты и была перигеем промеж.

$$v_{\text{н периг}} = \sqrt{\frac{GM}{a_н} \cdot \frac{1+e_н}{1-e_н}} = \sqrt{\frac{GM\cdot(1+e_н)}{a_п\cdot(1-e_п)}}$$, т.к. перигеи совпадают

$$v_{\text{п периг}} = \sqrt{\frac{GM}{a_п} \cdot \frac{1+e_п}{1-e_п}} \Bigg| \Rightarrow \frac{v_{\text{н периг}}}{v_{\text{п периг}}} = \sqrt{\frac{1+e_н}{1+e_п}} = 1{,}1 \text{ (по усл.)} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+e_н = 1{,}21\cdot(1+e_п) \Rightarrow e_н = -1+1{,}21\cdot 1{,}19 \approx 0{,}44$$

При этом $a_н\cdot(1-e_н) = a_п\cdot(1-e_п) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_н = a_п \cdot \frac{(1-e_п)}{(1-e_н)}$$

$$a_н = \frac{R}{1{,}19} \cdot \frac{0{,}81}{0{,}56}$$

$$a_н = R\cdot\frac{0{,}81}{0{,}56\cdot 1{,}19} \Rightarrow T_н = T\cdot\sqrt{\left(\frac{0{,}81}{0{,}56\cdot 1{,}19}\right)^3}$$

по 3-му з-ну Кеплера

Тогда $\Delta T = T_{\text{ожид}} - T_{\text{реал.}} = T\cdot\left(\sqrt{\left(\frac{1{,}21}{0{,}79\cdot 1{,}36}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{0{,}81}{0{,}56\cdot 1{,}19}\right)^3}\right) \approx$

$$\approx T\cdot\left(\sqrt{\left(\frac{1{,}2}{0{,}8\cdot 1{,}4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{0{,}8}{0{,}6\cdot 1{,}2}\right)^3}\right) = T\cdot\left(\left(\frac{15}{14}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \approx$$

$$\approx T\cdot\left(\frac{15}{14} - \frac{10}{9}\right) = T\cdot\frac{-5}{126}$$

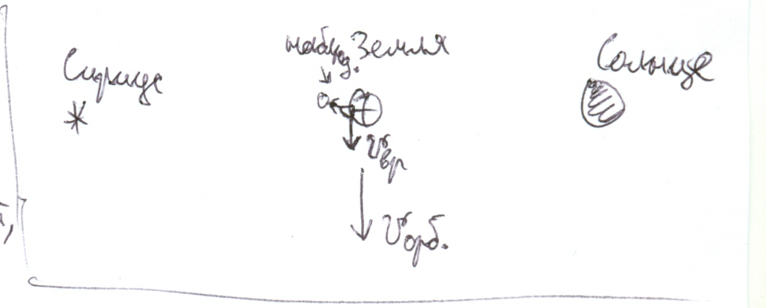
$|\Delta T| = 244\cdot\frac{5}{126} = \frac{20}{21}\text{ч} \approx 2\text{ч}$, но это чуть завыш. оценка.

Ответ: $\Delta T = 2\text{ч}$, но на самом деле чуть меньше

Задача 2. Омс-2

Если мы допустим, что Сириус и Солнце неподвижны друг относительно друга, то скорость наблюдателей относительно Сириуса будет складываться из трёх скоростей: а) скорости Земли при движ. по орбите
б) скорости Земли при вращении вокруг своей оси
в) ~~ско~~ скорости ходьбы

Заметим, что в новог. полночь Солнце имеет $\alpha_{\odot} \approx 18^h 40^m$, а значит Сириус, Земля и Солнце лежат почти на одной прямой, т.к. $|\alpha_{сир} - \alpha_{\odot}| \approx 12^h$



Тогда $\vec{v}_{орб}$ ~~...~~ будет $\perp$ направл. на Солнце $\Rightarrow$ $\perp$ направ. на Сириус, а значит в силу очень большого рас-ния до Сириуса это движение не будет менять рас-ния до звезды.

$\vec{v}_{вр}$ так же $\perp$ напр. на Сириус, т.к. в полночь Солнце ~~...~~ ровно с другой стороны от наблюдателя.

Значит $\vec{v}_{вр}$ тоже не влияет на рас-ние до Сириуса.

~~В~~ $v_{ходьбы} = 1 \frac{м}{с}$, значит за 30 с $\Delta x = 30$ м, что слишком мало даже при движении по прямой, соед.-щей Сириус и наблюдателя.

~~Получаем~~ Получаем, что рас-ние от наблюдателей до Сириуса не меняется, значит его яркость не меняется.

Атмосферные эффекты тоже сильно не повлияют, ведь за 30 с Сириус почти не изменит своё положение на небе.

Ответ: $\Delta m \approx 0$.

Задача 3. Омс-2

Сначала найдём R орбиты планеты по 3-му закону Кеплера.

Для планеты: $R = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot GM}{4\pi^2}}$, где M – масса звезды

Для Земли: $R_\oplus = \sqrt[3]{\frac{T_\oplus^2 \cdot GM_\odot}{4\pi^2}}$, где $R_\oplus$ и $T_\oplus$ – пар-ры орбиты Земли,

тогда: $R = R_\oplus \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2 \cdot \frac{M}{M_\odot}} = 1\text{ а.е.} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{4\text{ года}}{1\text{ год}}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt[3]{32}\text{ а.е.} = 2\sqrt[3]{4}\text{ а.е.} \approx$
$\approx 3{,}2\text{ а.е.}$

Теперь найдём светимость Солнца:

$L_\odot = 4\pi^2 \cdot \sigma \cdot R_\odot^2 \cdot T_\odot^4$, где $\pi = 3{,}14 \approx 3$

$\sigma = 6{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4} \approx 7 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$

$L_\odot = 4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 10^{-8} \cdot (6{,}5 \cdot 10^8)^2 \cdot (6 \cdot 10^3)^4\ Вт$

$R_\odot = 6{,}8 \cdot 10^8\ м \approx 6{,}5 \cdot 10^8\ м$

$L_\odot = 252 \cdot 10^{-8} \cdot 42{,}25 \cdot 10^{16} \cdot 1296 \cdot 10^{12}\ Вт$

$T_\odot = 5800К \approx 6000К$

(Константы специально округлены в разные стороны для точности расчётов)

$L_\odot = 250 \cdot 42 \cdot 1300 \cdot 10^{20}\ Вт$

$L_\odot = 13{,}65 \cdot 10^{23}\ Вт \approx 14 \cdot 10^{23}\ Вт$

Найдём светимость звезды:

звезда ∈ ГП
$M \in [M_\odot; 20M_\odot]$ $\Rightarrow L = L_\odot \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,5}$; $M = 2M_\odot \Rightarrow L = L_\odot \cdot \sqrt{2^7} = L_\odot \cdot 8\sqrt{2}$

Тогда освещённость на орбите планеты:

$I = \frac{L}{4\pi R^2} = \frac{L_\odot \cdot 8\sqrt{2}}{4\pi \cdot R^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{L_\odot}{R^2}$, где $L_\odot = 14 \cdot 10^{23}\ Вт$

$R = 3{,}2\text{ а.е.} = 4{,}8 \cdot 10^{11}\ м$

$\pi = 3{,}14$

$\sqrt{2} \approx 1{,}44 \approx 1{,}5$

$I = \frac{2\sqrt{2} \cdot 14 \cdot 10^{23}\ Вт}{\pi \cdot (4{,}8 \cdot 10^{11}\ м)^2} = \frac{1{,}5 \cdot 28 \cdot 10}{4{,}8 \cdot 15} \frac{Вт}{м^2 \cdot с}$

$I = \frac{28}{4{,}8} \frac{Вт}{м^2} = \frac{280}{48} \frac{Вт}{м^2} \approx 6 \frac{Вт}{м^2}$

Теперь нужно посчитать, сколько света принимает батарея и сколько производит.

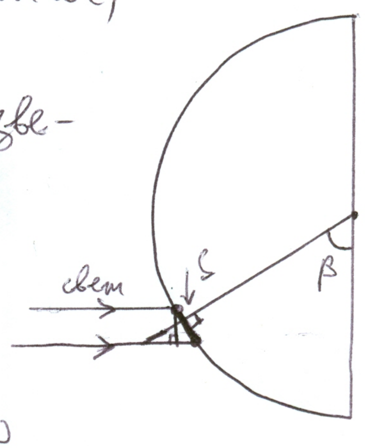
$\eta = 0{,}1$ (эффект-ать)

Батарея принимает свет ~~…~~ половину суток, то есть 10 часов (движение по орбите много медл. ⇒ синод. T ≈ сидер. T)

ω – угл. скорость вращ. планеты вокруг своей оси

$S_{эфф}$ – S ⊥ лучам звезды, то есть реальная площадь собирающая энергию.

Из простой геометрии (см. рис.) можно найти, что $S_{эфф} = S \cdot \sin\beta = S \cdot \sin\omega t$, где t – время от восхода.



Тогда за время $\Delta t \to 0$ батарея произведёт ΔQ энергии:

$$\Delta Q = I \cdot y \cdot S_{эфф} \cdot \Delta t =$$

$$= I \cdot y \cdot S \cdot \sin\omega t \cdot \Delta t =$$

$$= I \cdot y \cdot S \cdot \sin\beta \cdot \frac{\Delta\beta}{\omega}, \text{ т.к. } \Delta\beta = \Delta t \cdot \omega$$

Итого: $\Delta Q = Iy \cdot S \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin\beta \cdot \Delta\beta$, тогда проинтегрируем

$$Q = \frac{Iy \cdot S}{\omega} \cdot \int_0^{\pi} \sin\beta \, d\beta = \frac{IyS}{\omega} \cdot (-\cos\pi + \cos 0) =$$

$$= \frac{2IyS}{\omega} = \frac{1}{\pi} \cdot IyS \cdot T, \text{ т.к. } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$Q = \frac{2 \cdot 6 \frac{Вт}{м^2} \cdot 100 м^2 \cdot 0{,}1}{3} \cdot 20ч \cdot 3600 \frac{с}{ч} =$$

$$= 40\,Вт \cdot 72 \cdot 10^3 с = 288 \cdot 10^4 Дж \approx 3 \cdot 10^6 Дж$$

Ответ: за сутки батарея произведёт $Q = 3 \cdot 10^6$ Дж энергии.

№4.

Омс-2

Учитывая $d = 0{,}31$ кпк $= 310$ пк и $M = -2{,}5^m$ найдём расчётную ~~зв~~ видимую зв. вел-ну:

$$m_p = M + 5\lg\left(\frac{310 пк}{10 пк}\right) = -2{,}5 + 5\lg(31) = -2{,}5 + 5 \cdot 1{,}5 =$$

$$= -2{,}5 + 7{,}5 = 5^m$$

Теперь найдём отношение реальной и расчётной светимостей:

$$\frac{L_p}{L_{(1\ звезды)}} = 10^{0{,}4(m - m_p)} = 10^{0{,}4 \cdot 0{,}7} = 10^{0{,}28} \approx 2$$, значит

примерно половину света поглощает и отражает туманность, значит хотя бы часть туманности находится перед звездой.

По аналогичному расчёту получим:

$$\frac{L_p}{L_т} \approx 2$$, значит $L_p = L_т + L$.

(L туманности)

Получается, что весь свет, испущенный звездой в направлении Земли доходит до наблюдателя либо от самой звезды, либо от туманности.