СПб - 169

11

Дано:

$Q = 10^{55}$ Дж

$M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг

$E = \frac{1}{2} E_0$

$c = 2 \cdot 10^{8}$ $\frac{м}{с}$

Найти:

$N_\odot - ?$

Решение:

1) Найдём энергию покоя аккрецирующей массы вещ-ва, упавшего на черную дыру:

~~Будем считать, что система «черная дыра - аккрецирующая масса» замкнутая, а значит, потерь энергии нет~~

$E = Q = \frac{1}{2} E_0$

$E_0 = 2Q = 2 \cdot 10^{55}$ (Дж)

2) Найдём массу вещ-ва, упавшего на чёрную дыру:

$E_0 = M c^2$

$M = \frac{E_0}{c^2}$

$M = \frac{2 \cdot 10^{55}}{(2 \cdot 10^{8})^2} = \frac{2 \cdot 10^{55}}{4 \cdot 10^{16}} = 0,5 \cdot 10^{39} = 5 \cdot 10^{38}$ (кг)

3) Сравним массу вещ-ва, упавшего на черную дыру, с массой Солнца

$\frac{M}{M_\odot} = \frac{5 \cdot 10^{38}}{2 \cdot 10^{30}} = 2,5 \cdot 10^{8}$

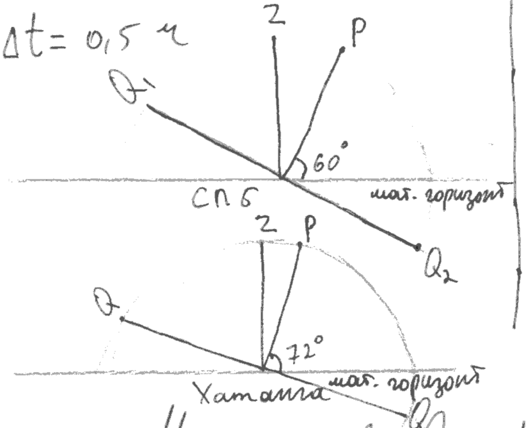
4) Кол-во звёзд, похожих на Солнце, равно отношению массы вещ-ва, упавшего на черную дыру, к массе Солнца, а значит, $N_\odot = \frac{M}{M_\odot} = 2,5 \cdot 10^{8}$

Ответ: $2,5 \cdot 10^{8}$ звёзд, похожих на Солнце, должны были бы упасть на чёрную дыру для получения такой вспышки.

№2.

Дано:

- сейчас конец декабря
- $\delta_м = -3°$
- СПБ (60° с.ш., 30° в.д.)
- Хатанга (72° с.ш., 102°,5 в.д.)
- $\Delta t = 0{,}5$ ч



Решение:

1) Найдём разницу во времени между СПБ и ~~сел~~ селом Хатанга:
Мы знаем, что разница во времени в 1 час – это 15° долготы, а значит:

$$\frac{102°,5 - 60°}{15°} = 2\frac{5}{6}\text{ ч} = 2\text{ ч } 50\text{ мин},$$

т.е. наблюдатель на долготе 102°,5 увидит какое-либо астрономическое событие на 2 ч 50 мин раньше, чем ~~по~~ петербуржец.

2) Посчитаем „радиус" альмукантарата звезды Миры в градусах; притом учтём, что Мира – звезда Южного неба, ~~а значит~~ т.к. её склонение меньше нуля, и формула „радиуса" альмукантарата будет выглядеть так: $90° - |\delta|$

$$90° - |\delta| = 90° - |-3°| = 87°$$

3) Посчитаем максимальную высоту подъёма звезды Миры на широте села Хатанга (учтём атмосферную рефракцию в 35')

$$h_{max} = \delta - \varphi + 90° + \rho$$

$h_{max} = -3° - 72° + 90° + 35' = 15°35'$, т.е. на такую высоту звезда Мира поднимается в своей ~~верх~~ верхней кульминации в селе Хатанга.

4) Нам известно, что ~~из~~ из-за разности долготы в селе Хатама верхняя кульминация (именно верхняя, и для СПБ, и для Хатанги, т.к. в нижней кульминации на небе Северного полушария она не видна) звезды Миры произойдёт на

2 (продолжение)

2 ч 50 мин раньше. Нам также известно, что астроном из Петербурга наблюдал звезду Миру за 2 ч до её кульминации на петербургском небе, а значит, за 50 мин до её кульминации на небе села Хатанга. Значит, в течение последующих 30 минут звезда Мира приблизится к своей кульминации для наблюдателя из Хатанги, а значит, он сможет её увидеть.

Ответ: да, сможет.

№ 4.

Дано:	СИ
$R_* = R_\oplus$; $M_* = \frac{1}{2} M_*$	
$R_\oplus = 6400$ км	$6{,}4 \cdot 10^6$ м
$\bar{\rho}_* = 9 \cdot 10^8 \frac{кг}{м^3}$	$9 \cdot 10^8 \frac{кг}{м^3}$
$T_п = \frac{1}{60} T_м$	
$T_м = 80$ сут	$4 \cdot 10^6$ с
$G = 7 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$	

Решение:

1) Найдём радиус орбиты экзопланеты:

$T = \frac{2\pi r}{v}$; $v = v_{1к}$, т.е. будем считать, что экзопланета вращается на I космической скорости.

Для нахождения скорости и радиуса орбиты составим уравнение:

$$\begin{cases} T = \frac{2\pi r}{v} \\ v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \end{cases}$$

Пусть год (т.е. орбитальный период) на Меркурии — 80 сут, т.е. $\approx 4 \cdot 10^6$ с

Пусть $\pi \approx 3$

Пусть $G \approx 7 \cdot 10^{-11}$

а) Найдем M_*: $M_* = R_*^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \bar{\rho}_*$

$M_* = (6{,}4 \cdot 10^6)^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 9 \cdot 10^8 \approx 9 \cdot 10^{29}$ (кг)

б) Решим составленное уравнение:

(на след. стр.)

N 4 (продолжение)

$$\begin{cases} 4\cdot 10^6 = \dfrac{6r}{v} \\ v = \sqrt{\dfrac{7\cdot 10^{-11}\cdot 9\cdot 10^{29}}{r}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\cdot 10^6 = \dfrac{6r}{v} \\ v = \sqrt{\dfrac{63\cdot 10^{18}}{r}} \approx \dfrac{8\cdot 10^9}{\sqrt{r}} \end{cases}$$

Подставим значение v в другую часть ур-я:

$$4\cdot 10^6 = \frac{6r\sqrt{r}}{8\cdot 10^9}$$

$$\cancel{4\cdot 10^3 = 6r\sqrt{r}}$$

$$\cancel{16\cdot 10^6 = 36r^3}$$

$$\cancel{16}\quad 4\cdot 10^6\cdot 8\cdot 10^9 = 6r\sqrt{r}$$

$$32\cdot 10^{15} = 6r\sqrt{r}$$

возведём обе части в квадрат:

$$10^{16} = 36 r^3$$

$$r^3 \approx 0{,}66\cdot 10^{15}\ (м)$$

$$r \approx 6{,}6\cdot 10^{4}\ (м)$$

2) Теперь найдём, какой радиус имела звезда, когда была красным гигантом:

а) положим, что плотность красного гиганта была около $4\cdot 10^{-6}\ \frac{кг}{см^3}$ (типичное для них значение)*

~~Найдём~~ Найдём радиус звезды, когда она была красным гигантом; зная, что тогда её масса была вдвое больше, чем сейчас:

$$R'_* = \frac{2M_*}{4\cdot 10^{-6}} = \frac{2\cdot 9\cdot 10^{29}}{4\cdot 10^{-6}} = 2\cdot 9^{,4}\cdot 10^{35} = 7{,}2\cdot 10^{36}\ (м)$$

---

*см. далее, как получено!

) Сравним R_*' и r:

$R_*' = 7{,}2 \cdot 10^{36}$ м

$r = 6{,}6 \cdot 10^{4}$ м

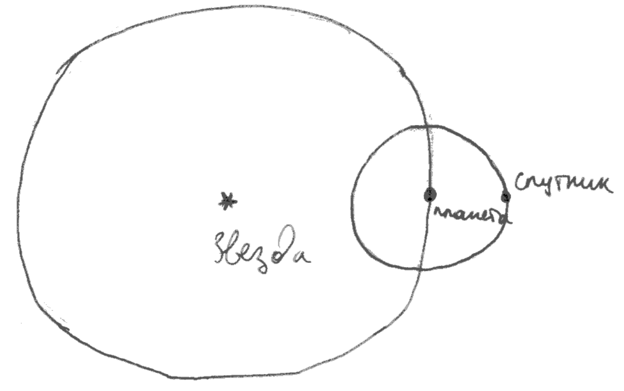
$r < R_*'$, значит, экзопланета не могла существовать на той орбите, на которой она сейчас.

* Мы знаем, что когда Солнце станет красным гигантом, его радиус станет равен приблизительно 1 а.е., т.е. $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м, а сейчас его радиус около 700 тыс. км, т.е. $7 \cdot 10^{8}$ м, т.е. увеличится примерно в 1000 раз, т.е. его средняя плотность будет ~~его~~ считаться по формуле: $\frac{2 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (7 \cdot 10^{8} \cdot 10^{3})^3} \approx 4 \cdot 10^{-6} \left(\frac{кг}{м^3}\right)$

Ответ: нет, не могла.

N5.

~~Дано~~ Иллюстрация:



Дано:

$M_* = 4 M_\odot$

$r_1 = 4$ а.е.

$m_п = 3 \cdot 10^{24}$ кг

$r_2 = 4 \cdot 10^{8}$ м

$R_c = 800$ км

$G = 7 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$

$M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг

Решение:

1) Найдём период обращения планеты вокруг звезды:

$$\frac{(M_* + m_п) T_п^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$

Учтём, что $m_п << M_* \Rightarrow M_* + m_п \approx M_*$

$$\frac{M_* T_п^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$

$$\frac{4\cdot 2\cdot 10^{30}\cdot T_n^2}{(4\cdot 1{,}5\cdot 10^{11})^3} = \frac{40}{7\cdot 10^{-11}}$$

$$\frac{8\cdot 10^{30}\cdot T_n^2}{216\cdot 10^{33}} = \frac{40}{7\cdot 10^{-11}}$$

$$\frac{8T_n^2}{216\cdot 10^3} = \frac{4\cdot 10^{12}}{7}$$

$$\frac{2T_n^2}{216\cdot 10^3} = \frac{10^{12}}{7}$$

$$\frac{2T_n^2}{30\cdot 10^3} = 10^{12}$$

$$\frac{2}{3}T_n^2 = 10^{16} \quad |\cdot 3$$

$$2T_n^2 = 3\cdot 10^{16}$$

$$T_n^2 = \frac{3}{2}\cdot 10^{16}$$

$$T_n = \sqrt{1{,}5\cdot 10^{16}}$$

$$T_n \approx 10^8\ (c)$$

$7^2 \approx 50$

$216 \approx 200 \approx 50\cdot 4$

$216 \approx 7^2\cdot 4$

$\frac{216}{7} \approx 7\cdot 4 \approx 30$

$\sqrt{1{,}5} \approx 1$

2) Найдём скорость спутника, с которой он движется по орбите: т.к. он не падает на планету и не улетает от неё, его скорость равна I космической, а значит, её можно найти по формуле:

$$\vartheta_{1к} = \sqrt{\frac{Gm_n}{r_2+R_c}}$$

Учтём, что $R_c \ll r_2$, а значит, $R_c + r_2 \approx r_2$

$$\vartheta_{1к} = \sqrt{\frac{7\cdot 10^{-11}\cdot 3\cdot 10^{24}}{4\cdot 10^8}}$$

$$\vartheta_{1к} = \sqrt{\frac{21\cdot 10^5}{4}} = \sqrt{\frac{210\cdot 10^4}{4}}$$

$$\vartheta_{1к} = 7\cdot 10^2\ \left(\frac{м}{с}\right).$$

$196 < 210 < 225$

$210-196 < 225-210$, зн. $\sqrt{210} \approx \sqrt{196} = 14$

№5 (продолжение)

3) Найдём период обращения спутника вокруг планеты:

$\pi \approx 3$

$$T_c = \frac{2\pi r_2}{\vartheta_{1к}}$$

$$T_c = \frac{6 \cdot 4 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^2}$$

$$T_c \approx 3 \cdot 10^6 \ (c)$$

4) Найдём синодический период ~~обращения~~ спутника:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_п}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{3 \cdot 10^6} - \frac{1}{10^8}$$

$$\frac{3 \cdot 10^8}{S} = 10^2 - 3$$

$$\frac{3 \cdot 10^8}{S} \approx 10^2$$

$$S \approx 3 \cdot 10^6 \ (c)$$

Ответ: $3 \cdot 10^6$ с период повторения фаз спутника для наблюдателя на планете.

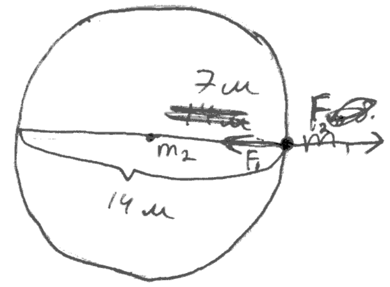
№3.

Дано:

$L = 14$ м

Решение:

Пусть обсерватория „Хитоми" была ~~шарообразной~~ в форме диска с куполом~~; т.е. полусферою~~. Пусть m_1 и m_2 — некие тяжелые предметы в центре и на краю обсерватории.



Обсерватория

Пусть $m_1 = 200$ кг, $m_2 = 500$ кг.

1) Найдём радиус обсерватории:

$$r = \frac{L}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ (м)}$$

2) Чтобы обсерватория разрушилась, равнодействующая 2-х сил (центробежной и центростремительной) должно быть равна нулю. Значит, модули этих сил должны быть равны, т.к. эти силы направлены в противоположные стороны.

$a_{ц\text{-}с.}$ направлено в сторону m_2 от m_1, т.к. m_2 в центре.

$$a_{ц\text{-}с.} = \frac{\upsilon^2}{r}$$

Сила, с которой m_2 притягивает m_1, равна: $F_1 = \frac{m_2 \upsilon^2}{r}$,

~~Сила, с которой m_1 пытается оторваться от m_2 равна $F_2 = \frac{m_1\upsilon^2}{r}$~~ а сила, с которой m_1 пытается оторваться от m_2, равна F_1 по модулю и противоположна по направлению.