Задача №3

Дано:
$M = 2M_\odot$
$T = 4^{y}$
$\tau = 20^{h}$
$S = 100\,м^2$
$\varepsilon = 0{,}1$

$W_0 - ?$

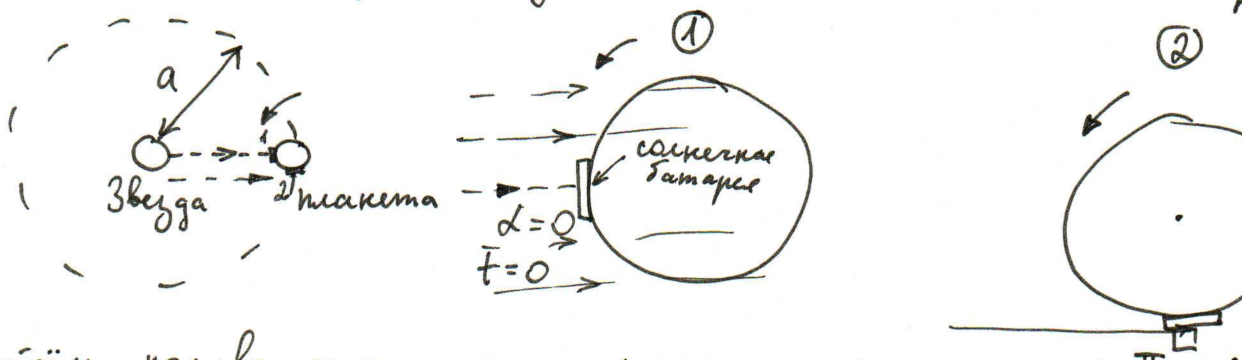
Решение:
По третьему з-ну Кеплера:

$$\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2 \cdot \frac{M}{M_\oplus} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^3$$, где $T_\oplus = 1^y$ - орбитальный период Земли; $M_\oplus = M_\odot$ - масса Солнца; a_0 - астрономическая единица.

$$4^2 \cdot 2 = \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{32}\, a_0$$ - радиус орбиты планеты.

$a > a_0$ и $T > T_\oplus$ $\Rightarrow$ за одни сутки перемещение планеты по орбите невелико и в расчётах его учитывать не будем (оно меньше Земного, к-рое составляет около $1°$/сут).

Изобразим данную ситуацию: α - угол падения лучей



Найдём кол-во энергии, к-рое получает станция за время от положения ① до положения ②: $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $t = \frac{\tau}{4}$

$$W_{12} = \frac{W}{2} \quad (\text{в силу симметрии})$$

$W_i = E \cdot S \cdot \cos\alpha_i$ - энергия в $i^{\text{тый}}$ момент времени

$$\alpha = 2\pi \frac{t_i}{\tau}$$

$E = \frac{L}{4\pi a^2}$ - освещённость, создаваемая звездой на расстоянии a.

$$W_i = \frac{LS}{4\pi a^2} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t_i}{\tau}\right)$$

$$dW_i = \frac{LS}{4\pi a^2} \cdot \left(-\sin\left[2\pi \frac{t_i}{\tau}\right]\right) dt$$

$$W_i = -\frac{LS}{4\pi a^2} \int_0^{\tau/4} \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) dt$$

$$W_i = \frac{LS}{4\pi a^2} \cos\alpha$$

$$dW_i = -\frac{LS}{4\pi a^2} \cdot \sin\alpha\, d\alpha$$

$$W_{12} = -\frac{LS}{4\pi a^2} \int_0^{\pi/2} \sin\alpha\, d\alpha$$

$$W_{12} = \frac{LS}{4\pi a^2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{LS}{4\pi a^2}(0-1) = \frac{LS}{4\pi a^2}$$

$$W = \frac{LS}{2\pi a^2}$$

$L \sim M^{3,9}$

$L \sim M^4$ - светимость звезды на главной последовательности пропорциональна массе в 4 степени.

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4 \Rightarrow L = 2^4 L_\odot$$

$$W = \frac{2^4 L_\odot \cdot S}{2\pi \cdot 32^{\frac{2}{3}} a_0^2} = \frac{2^3 L_\odot S}{\pi \cdot 32^{\frac{2}{3}} a_0^2} \approx \frac{8 L_\odot S}{30 a_0^2}$$

$$W = \frac{8\cdot 4\cdot 10^{26}\cdot 100}{30\cdot(1{,}5\cdot 10^{11})^2} \approx \frac{8\cdot 4\cdot \cancel{10^{26}}^{10^4}\cdot 100}{30\cdot 2{,}25\cdot \cancel{10^{22}}} \approx \frac{32\cdot 10^6}{64} \approx \frac{10^6}{2} \approx \boxed{5\cdot 10^5\ \text{Вт}}$$

~~Ответ: $5\cdot 10^5$ Вт.~~ (без учёта множителя ε)

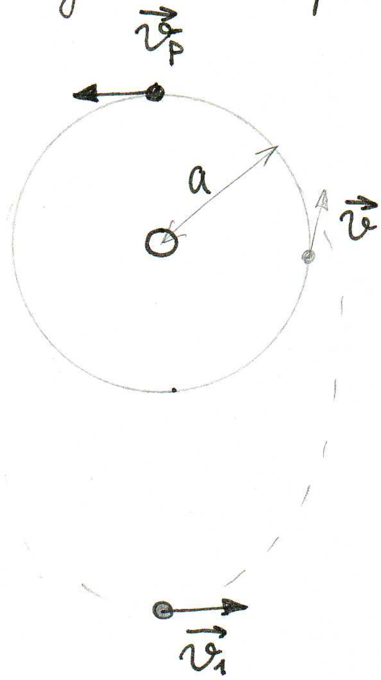
С учётом того, что только 10 % энергии поглощается:

$$W_0 = 5\cdot 10^5 \cdot 0{,}1 = \boxed{5\cdot 10^4\ \text{Вт}}$$

Ответ: $5\cdot 10^4$ Вт.

Задача № 1.

1) Сначала добавка скорости, потом уменьшение.



$\vec{v}$ - скорость на геостационарной орбите.

$\vec{v}_p = (0{,}1+1)\vec{v} = 1{,}1\vec{v}$ - скорость после добавления импульса в первый раз

$\vec{v}_1$ - скорость после добавления импульса во второй раз.

$v_p = 1{,}1v < 1{,}4v \Rightarrow$ орбита - эллипс, где v_p - скорость в перицентре.

По III-му з-ну Кеплера (в сравнении с Луной):

$$\left(\frac{T}{T_☾}\right)^2 = \left(\frac{a}{a_☾}\right)^3; \quad T_☾ \approx 30^d, \quad a_☾ \approx 380000 \text{ км}$$

$$\left(\frac{1}{30}\right)^2 \approx \left(\frac{a}{a_☾}\right)^3$$

$$a = \frac{a_☾}{30^{\frac{2}{3}}} \approx \frac{a_☾}{10} \approx 38000 \text{ км}$$ - радиус орбиты геостационарного спутника

$v = \frac{2\pi a}{T}$ - скорость геостационарного спутника

$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a_p}}\cdot\sqrt{1+e}$ перицентрическая скорость; $a_p = a$

$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a_0}}\cdot\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 1{,}1\cdot\frac{2\pi a}{T}$, где a_0 - большая полуось новой орбиты; e - её эксцентриситет.

$$\cancel{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} = \quad \sqrt{\frac{GM}{a}}\cdot\sqrt{1+e} = 1{,}1\cdot\frac{2\pi a}{T}$$

$$\sqrt{1+e} = \sqrt{\frac{a}{GM}}\cdot\frac{2{,}2\pi a}{T}$$

$$1+e = \frac{a}{GM}\cdot\frac{2{,}2^2\pi^2a^2}{T^2}$$

$$e = \frac{(2{,}2\pi)^2a^3}{GMT^2} - 1$$

$$e = \frac{(2{,}2\pi)^2\cdot(38\,000\cdot10^3)^3}{7\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot86400^2} - 1 \approx \frac{(2{,}2\pi)^2\cdot4^3\cdot10^{21}}{7\cdot6\cdot10^{13}\cdot75\cdot10^{8}} - 1 \approx \frac{8}{7} - 1 \approx \frac{1}{7}$$

$v_a = v_p\cdot\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{-1}$; $v_a = v_p\cdot\frac{1-e}{1+e} \approx v_p\cdot\frac{6/7}{8/7} \approx \frac{3}{4}v_p$ - скорость в афелии (через $\frac{1}{2}T$)

$v_1 = v_a\cdot0{,}9 = \frac{9}{10}v_a = \frac{9}{10}\cdot\frac{3}{4}v_p = \frac{9}{10}\cdot\frac{3}{4}\cdot1{,}1\,v = \frac{9}{10}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{10}v \approx \frac{297}{400}v$

$v_1 \approx \frac{3}{4}v$ - новая скорость (в афелии новой орбиты)

$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{a_a}}\cdot\sqrt{1-e'}$; e' - новый эксцентриситет.

$$a_a = a(1+e) = \frac{8}{7}a$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2v^2 = \frac{7GM}{8a}\cdot(1-e')$$

$$\frac{9v^2}{\cancel{16}\,2} = \frac{7GM}{\cancel{8}\,1\,a}(1-e')$$

$$1-e' = \frac{9v^2a}{2\cdot7GM}$$

$$e' = 1 - \frac{9v^2a}{14GM} = 1 - \frac{9\cdot(2\pi)^2a^3}{14GMT^2} = 1 - \frac{9\cdot1{,}1^2\cdot2^2\pi^2\cdot a^3}{14\cdot GMT^2\cdot1{,}1^2}$$

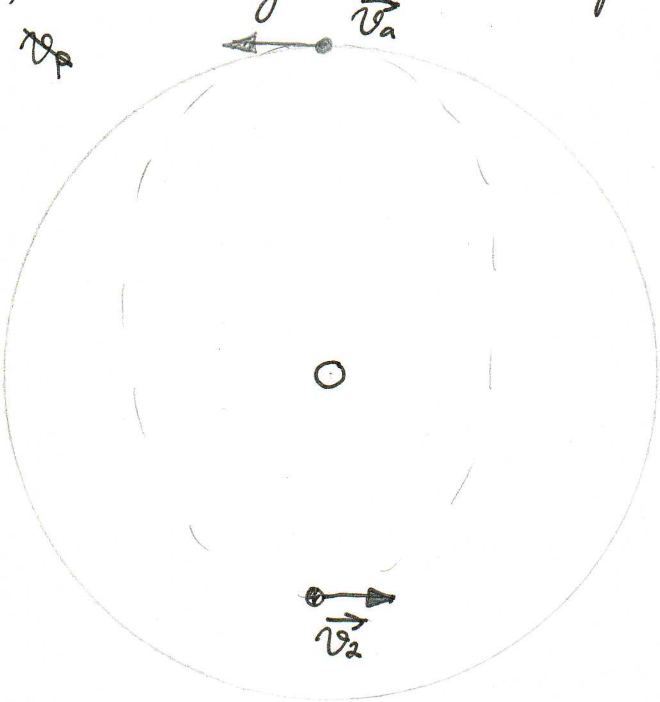
$\approx \frac{1}{7}$

$$e' = 1 - \frac{9\cdot8}{14\cdot1{,}21\cdot7} \approx 1 - \frac{72}{118} \approx \frac{118-72}{118} = \frac{46}{118} \approx \frac{24}{59} \approx \frac{24}{60} \approx \frac{4}{10} \approx \frac{2}{5}$$

$$a' = \frac{a_p + a_a}{2} = \frac{\frac{1-e'}{1+e'}a_a + a_a}{2} = \frac{1-e'+1+e'}{2(1-e')}a_a = \frac{2}{2(1-e')}a_a = \frac{a_a}{1-e'} = \frac{\frac{8}{7}a}{\frac{3}{5}}$$

$a' = \frac{40}{21}a \approx 2a$ – новая большая полуось ; $\boxed{a_1 = 2a}$

2) Сначала уменьшение скорости, потом увеличение:



$v_a = 0{,}9v$

$v_2 = 1{,}1\,v_p$

$$\sqrt{\frac{GM}{a_a}}\cdot\sqrt{1-e} = 0{,}9v$$

$$\frac{GM}{a}\cdot\left(\sqrt{1-e}\right)^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 v^2$$

$$1-e = \frac{81\,v^2\cdot a}{100\,GM}$$

$$e = 1 - \frac{81}{100}\,\frac{4\pi^2a^3}{GMT^2}$$

$$e = 1 - \frac{81\cdot\overbrace{\left((2{,}2\pi)^2a^3\right)}^{\approx\frac{8}{7}}}{100\cdot1{,}21\cdot GMT^2}$$

$$e = 1 - \frac{81\cdot8}{121\cdot7} = 1 - \frac{648}{847} = \frac{847-648}{847} \approx \frac{850-650}{850} = \frac{200}{850} = \frac{2}{85}$$

$$v_p = v_a\cdot\frac{1+e}{1-e} = 0{,}9v\cdot\frac{87/85}{83/85} = \frac{87\cdot9}{83\cdot10}v \approx \frac{780}{830}v \approx \frac{78}{83}v$$

$$v_2 = \frac{11}{10}\cdot\frac{78}{83}v \approx \frac{858}{830}v \approx \frac{86}{83}v \approx v$$

$$v_2^2 = \frac{GM}{a_p}\cdot(1+e')\ ;\quad a_p = a(1-e) = \frac{83}{85}a \approx a$$

$$v^2 = \frac{GM}{a}\left(1+\cancel{e'}\right)\quad e'\approx 0$$

$a' = a$ – новая большая полуось. ; $\boxed{a_2 = a}$

По III-му з-ну Кеплера:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2^3 = \frac{16}{2}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{16}{2}} = \frac{4}{1{,}4} \approx 3.$$

Ответ: $\frac{T_1}{T_2} = 3$.

Задача №5.

Дано:
$L = 10^{30}$ Вт
$M = 1{,}4\, M_\odot$
$R = 10$ км
$E = 30$ кэВ
$R_м$ - ?

Решение:

$E = h\nu$ - энергия электрона, излучающего на частоте ν.

$\nu = \frac{E}{h}$ - частота излучения; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

Пусть электрон вращается по окружности с радиусом R_e. Тогда скорость v_0 его вращения:

$$v_0 = \frac{2\pi R_e}{T} = 2\pi R_e \cdot \nu \qquad (1)$$

В магнитном поле на электрон действует сила Лоренца $F_л$, равная: $F_л = qBv_0 = eBv_0$, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл - заряд электрона.
Эта сила придаёт ему нормальное ускорение a_n.

$$a_n = \frac{v^2}{R_e}$$

По II-му з-ну Ньютона: $ma_n = F_л$, где m - масса электрона $m \sim 10^{-31}$ кг

$$m\frac{v_0^{\cancel{2}}}{R_e} = eB\cancel{v_0} \Rightarrow v_0 = \frac{eBR_e}{m} \qquad (2)$$

v_0(из 1) = v_0(из 2):

$$2\pi \cancel{R_e}\nu = \frac{eB\cancel{R_e}}{m}$$

$$\frac{2\pi E}{h} = \frac{eB}{m} \Rightarrow B = \frac{2\pi E m}{he}$$ - значение индукции магнитного поля на поверхности нейтронной звезды.

Из условия,

$$B(R) = \frac{\alpha}{R^3}, \quad \alpha = const \text{ - некий коэффициент}$$

$$\frac{\alpha}{R^3} = \frac{2\pi E m}{he} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi E m R^3}{he}$$

Так, индукция магнитного поля на границе магнитосферы:

$$B(R_м) = \frac{\alpha}{R_м^3} = \frac{2\pi E m R^3}{he} \cdot \frac{1}{R_м^3}$$

И давление магнитного поля:

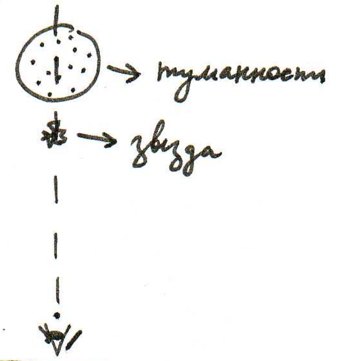
$$P = \varkappa B^2(R_м) = \varkappa \cdot \frac{2\pi E m R^3}{he} \cdot \frac{1}{R_м^3}$$

Динамическое давление вещ-ва:

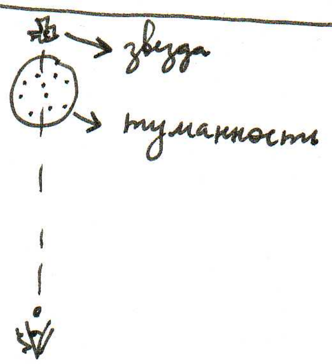
$P = \frac{\rho v^2}{2}$, где v - скорость, с к-рой на расстоянии $R_м$ происходит „падение" вещ-ва: $v^2 = \frac{GM}{R_м}$; ρ - плотность вещ-ва на расстоянии $R_м$ от центра звезды.

Задача № 4.

Рассмотрим случай, когда туманность расположена дальше, чем звезда:



Т.к. туманность находится дальше и светится за счёт переизлучения, то вследствии поглощения света она будет тусклее, чем звезда и их зв. вел. не будут одинаковыми. Значит, звезда дальше, чем туманность:



За счёт того, что туманность находится ближе, чем звезда, в ней теряется часть энергии, поступающей от звезды.

Найдём видимую зв. вел. звезды в отсутствие поглощения:

По ф-ле Погсона: $m_0 - M = -2{,}5 \lg\left(\frac{10\,пк}{r}\right)^2$

$$m_0 - M = 5 \lg \frac{r}{10\,пк}$$

$$m_0 = M + 5\lg\frac{r}{10\,пк} = M + 5\lg\frac{310}{10} \approx M + 5\lg 30 \approx$$

$$\approx M + 5(\lg 3 + \lg 10) \approx M + 5(0{,}4 + 1) = \cancel{M + 5{,}2^m}$$

$$\cancel{m_0 \approx -2{,}5^m + 5{,}2^m = \boxed{+2{,}7^m}}$$

$m_0 \approx M + 7^m$; $m_0 = -2{,}5^m + 7^m = 4{,}5^m \Rightarrow$ поглощение из-за туманности ~~из-за туманности~~ на луче зрения составило $A = 5{,}7 - 4{,}5 = 1{,}2^m$.

~~В плоскости Галактики поглощение составляет 2^m/кпк $\Rightarrow$ на 0,31 кпк пришлось $\approx 0{,}6^m$.~~

~~Таким образом, из-за туманности на луче зрения поглотилось $A_T = 1{,}2^m - 0{,}6^m = 0{,}6^m$.~~

~~$\left(\frac{E_{погл}}{E_{пад}}\right)$ – отношение поглощённой туманностью энергии к ~~переизлучённой~~ падающей на неё.~~

~~По ф-ле Погсона:~~

~~$A_T - m_0 = +2{,}5 \lg\left(\frac{E_{погл}}{E_{пад}}\right)$~~

~~$\frac{A_T - m_0}{+2{,}5} = \lg\left(\frac{E_{погл}}{E_{пад}}\right)$~~

~~$\frac{0{,}6 - 4{,}5}{+2{,}5} = \lg\left(\frac{E_{погл}}{E_{пад}}\right)$~~

~~$-1{,}5 \approx \lg\left(\frac{E_{погл}}{E_{пад}}\right)$~~

~~$\frac{E_{погл}}{E_{пад}} = 10^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt{1000})^{-1} \approx \frac{1}{33}$~~

~~$E_{погл} \ll E_{пад} \Rightarrow E_{изл} \approx E_{пад}$ – переизлучённая энергия $\approx$ равна падающей~~

~~$\Downarrow$~~

~~будем считать, что туманность эквивалентна звезде, находящейся на~~

Задача №2

За 30 секунд пешеходы пройдут 30 м, что не может повлиять на видимую зв. вел. так, что она изменится на сколь угодно малое, но измеряемое значение. Однако при перемещении по поверхности Земли и из-за вращение Земли будет меняться **высота** звезды над горизонтом. Это означает, что свет будет проходить разные по протяжённости слои атмосферы и поглощение в случае начала и окончание движение будут разными, что и даст разницу в звёздных величинах Сириуса. 31 декабря разница между средним солнечным и звёздным временем составляет $\sim 6^h \Rightarrow S = 6^h$ - звездное время.

Известно соотношение:

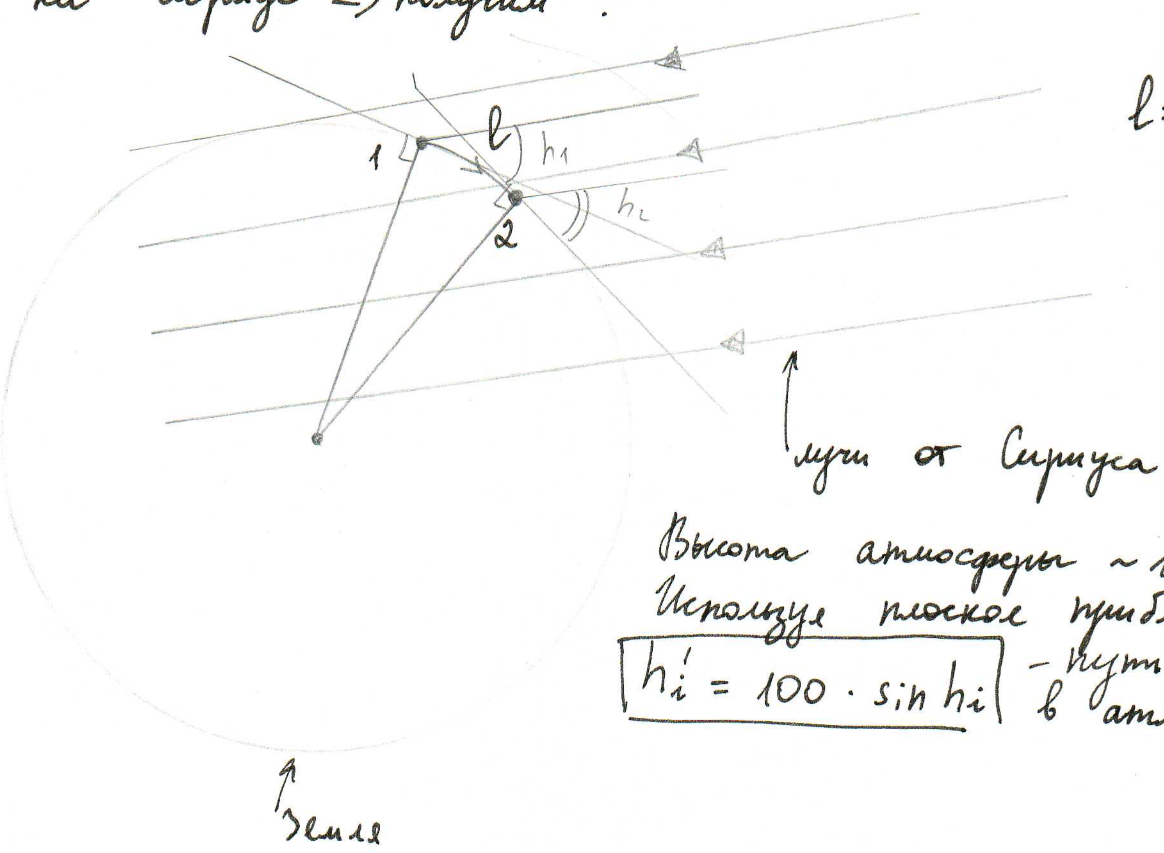
$S = \alpha + t$, где

α - прямое восхождение; t - часовой угол светила.

В момент начала движение:

$t = S - \alpha$; $t = 6^h - 6^h45^m = -45^m = 23^h15^m$

Очевидно, в каждый момент времени пешеходы идут в направлении на Сириус $\Rightarrow$ получим:



$l = 30$ м

Высота атмосферы ~ 100 км.
Используя плоское прибл-е:

$\boxed{h_i' = 100 \cdot \sin h_i}$ - путь луча в атмосфере