НАГ-7
стр. 3

№2

А теперь немного мат: как я нашла $\lg\frac{5}{2}$.

Я помню, что:

$\lg 2 = 0{,}3$

$\lg 3 = 0{,}5$

$\lg 5 = 0{,}7$

$\lg 7 = 0{,}8$

По правилам логарифмирования:

$$\lg\frac{5}{2} = \lg 5 - \lg 2$$

$$\Downarrow$$

$$\lg\frac{5}{2} = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$$

Найдём m_{max}, видимую в телескоп:

$$m_{max} = 6^m + 5\lg\frac{D}{d}$$

Пусть телескоп равнозрачковый $\Rightarrow d = 6$ мм

$$m_{max} = 6^m + 5\lg\frac{500\text{ мм}}{6\text{ мм}} = 6^m + 5\left(\lg\frac{5}{6} + \lg 100\right) = 6^m + 5\left(\lg 5 - \lg(2\cdot 3) + 2\right) =$$

$$= 6^m + 5(0{,}7 - 0{,}3 - 0{,}5 + 2) = 6^m + 5\cdot 1{,}9^m = 15{,}5^m$$

$m_{max} < m$ $\Rightarrow$ в телескоп не видно. (совет юному астроному: купить ПЗС-матрицу и трекер :))

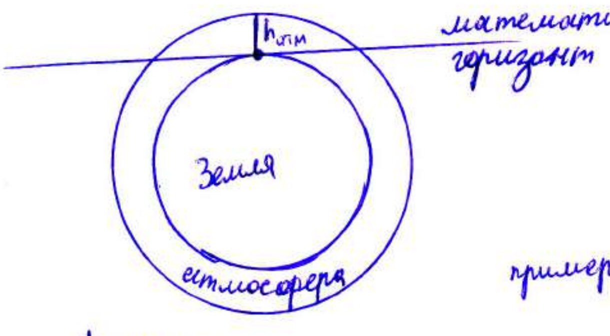
Ответ: 21^m – зв. вел. астероида; в телескоп не увидим.

№5.

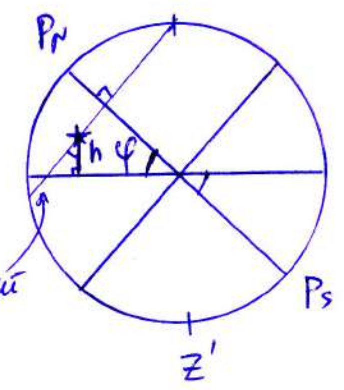
$\delta = 69^\circ 20'$ $\varphi = 68^\circ 58'$
$RA = 11^h 31^m$
$m_0 = 3{,}8^m$
$m(t) = ?$

Видимая звёздная величина будет меняться из-за того, что с изменением ~~[illegible]~~ часового угла будет меняться слой атмосферы, через ~~которы~~ ~~которых~~ который проходит свет и ослабляется: $\frac{W_0}{W} = e^{\tau} \Rightarrow W = \frac{W_0}{e^{\tau}}$

$\tau \propto l$ ↑ слой атм.



$h_{атм} \approx 100$ км.



$\delta_{(z)} = \varphi$
$\delta = 69^\circ 20'$
$\varphi = 68^\circ 58'$
$\Rightarrow$ звезда практически доходит до зенита $\Rightarrow$ при $t=0$, яркость максимальна
$h^+ \approx 90^\circ$

Найдём, при каком t светило касается горизонта.

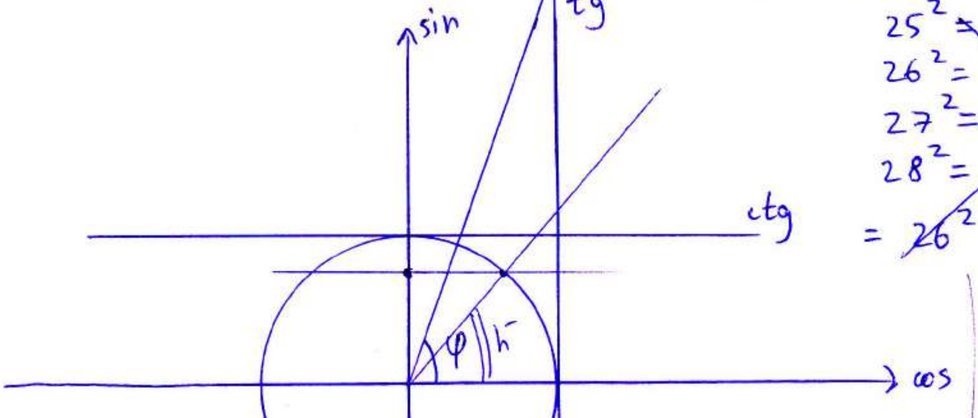
$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta \approx -\operatorname{tg}^2\varphi$

$\frac{5{,}5}{2} = \operatorname{tg}\varphi = 2{,}75 \approx 2{,}8 \Rightarrow$ такой t $\nexists$ $\Rightarrow$ светило незаходящее

$\cancel{25^2 = 625}$
$\cancel{26^2 = 625 + (25+26)}$
$\cancel{27^2 = 26^2 + (26+27)}$
$\cancel{28^2 = 27^2 + (27+28) = 26^2 + (26+27)}$

$h^- = 68^\circ 58' - 90^\circ + 69^\circ 20' = 48^\circ$

$h^- \gg 1^\circ \Rightarrow$ будем считать Землю и атм. плоскими.

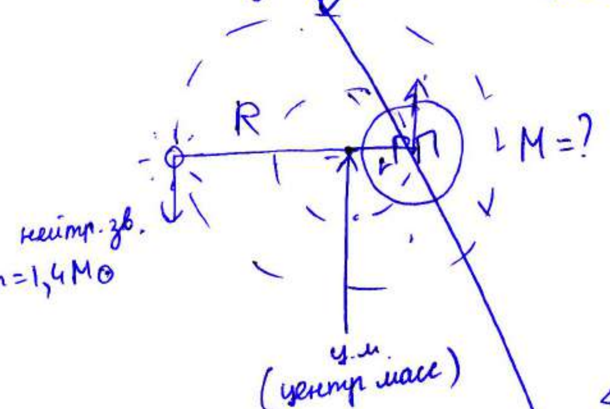


R = 2 см.

$l = \frac{h_{атм}}{\sin h^-} = \frac{100\text{ км} \cdot 2}{1{,}5} = 133$ км.

$\boxed{№ 4.}$

Hα меняет длину волны из-за эффекта Доплера



$t = 1$ с.

$\Delta t = 10^{-4}$ с.

$\Delta\lambda = 0{,}5$ Å

$L = ?$

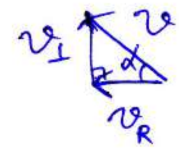
Пульсации — богатая внутренняя жизнь нейтронной звезды

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_R}{c}$$

$\lambda_{H\alpha} = 6563$ Å $\Rightarrow v_R = \frac{c\cdot\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{3\cdot10^5 \text{ км/с}\cdot 0{,}5 \text{ Å}}{6563 \text{ Å}} = \frac{1}{40\,000}\cdot 10^5$ км/с $=$

$= 2{,}5$ км/с

луч зрения



$\Rightarrow \boxed{v = \frac{v_R}{\cos\alpha}}$ $\alpha \in [0;\ 90^\circ)$

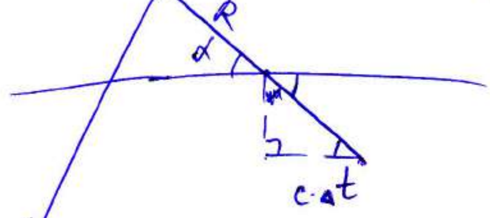
Возьмём середину возможного интервала α:

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\Downarrow$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt2} \approx \frac{5}{7}$

$v = \frac{2{,}5 \text{ км/с}\cdot 7}{5} = 3{,}5$ км/с



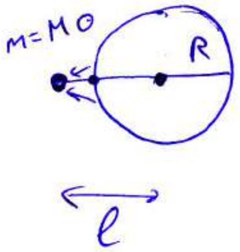
$\Rightarrow \boxed{R = \frac{c\Delta t}{\cos\alpha}}$

$R = \frac{3\cdot10^5 \text{ км/с}\cdot 10^{-4} \text{ с}\cdot 7}{5} = 4\cdot10^1$ км. $= 40$ км. — фигня $\Rightarrow \alpha > 45^\circ$

По III з-ну Кеплера: $T^2 = \frac{4\pi^2(R+r)^3}{G(m+M)} \Rightarrow M = \frac{v\,4\pi^2(R+r)^3}{G} - m$

$r = \frac{mR}{M}$ $M = \frac{v\,4\pi^2(R^3 + 3R^2 r)}{G} - m$

№3



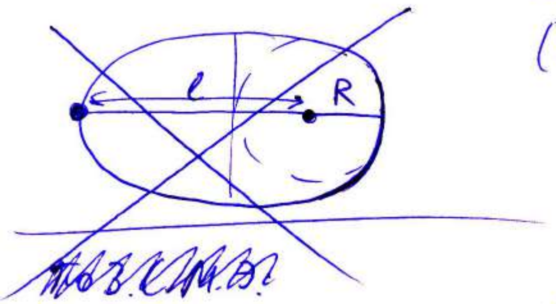
$R = 0{,}10$ а.е.
$l = 0{,}14$ а.е.
$\rho = ?$

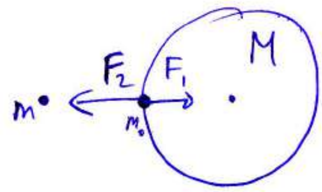
Небольшая скорость = ~~наименьшая из всех возможных — чуть больше v_{Ik}~~

предельный случай $F_1 = F_2$

$$\cancel{e = \frac{l-R}{l+R} = \frac{0{,}14\text{ а.е.} - 0{,}10\text{ а.е.}}{0{,}14\text{ а.е.} + 0{,}10\text{ а.е.}} = \frac{0{,}04\text{ а.е.}}{0{,}24\text{ а.е.}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17}$$

(на деле $F_2 > F_1$ на бесконечно малую величину)





$$F_1 = \frac{G m_0 M}{R^2}$$

$$F_2 = \frac{G m_0 m}{(l-R)^2}$$

$$\cancel{\Delta g = \frac{Gm}{(l-R)^2} - \frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{R^2\left(\frac{l}{R}-1\right)^2} - \frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{R^2}\left(\frac{1}{\left(\frac{l}{R}-1\right)^2} - 1\right)}$$

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \frac{M}{R^2} = \frac{m}{(l-R)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$M = \frac{R^2 m}{(l-R)^2} = \frac{(0{,}10\text{ а.е.})^2 \cdot M_\odot}{(0{,}14\text{ а.е.} - 0{,}10\text{ а.е.})^2} = \frac{0{,}01\ M_\odot}{0{,}0016} = \frac{10^{-2}}{0{,}16 \cdot 10^{-2}} M_\odot =$$

$$= 6 M_\odot$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3 \cdot 6 M_\odot}{4\pi R^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{30}\text{ кг}}{2 \cdot (0{,}1\text{ а.е.} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\text{ м/а.е.})^3} = \frac{3 \cdot 10^{30}\text{ кг}}{(1{,}5 \cdot 10^{10}\text{ м})^3} =$$

$= 0{,}9$ кг/м^3 — сопоставимо с плотностью воздуха =)

=) звезда, очевидно, в стадии гиганта

Ответ: $0{,}9$ кг/м^3

По з-ну Погсона:

$$m = m_0 + 2{,}5\lg\frac{W_0}{W_H}$$

Сравним с Вегой, тогда:

$$m = 2{,}5\lg\frac{2{,}5\cdot 10^{-8}}{W}$$

$$W = \frac{W_H}{e^{kl}}$$

какой-то коэффициент

$$\Rightarrow m = 2{,}5\lg\frac{2{,}5\cdot10^{-8}}{W_H}\cdot e^{kl} = 2{,}5\left(\lg(2{,}5\cdot10^{-8}) + \lg e^{kl} - \lg W_H\right) =$$

$$= 2{,}5\left(0{,}4 - 8 + \lg e^{kl} - \lg W_H\right) =$$

$$= \underbrace{-19}_{const} + 2{,}5\lg e^{kl} \underbrace{- 2{,}5\lg W_H}_{const}$$

начальный

~~По Погсону~~

$$\cancel{\frac{W_H}{W_B} = 2{,}512^{0{,}4m_H} \Rightarrow W_H = 2{,}5\cdot10^{-8}\cdot 2{,}512}$$

$l(t) = ?$ $\quad l = \frac{h_{атм}}{\sin h}$

$$\frac{2\pi}{23^h 56^m 04^s} \approx 15^\circ/h$$

$h(t) = ?$ $\quad h = \varphi + p\cos\omega t$ — в общем-то ур-ние колебания со средним значением h, амплитудой $= p$ (полюсное расстояние) и угловой скоростью неба.

$$\Downarrow$$

$$l = \frac{h_{атм}}{\sin(\varphi + p\cos\omega t)}$$

$n\sigma$ ← S поглощающей частицы

← концентрация частиц

$$m = -19 - 2{,}5\lg W_H + 2{,}5\lg e^{k\cdot\frac{h_{атм}}{\sin(\varphi+p\cos\omega t)}}$$

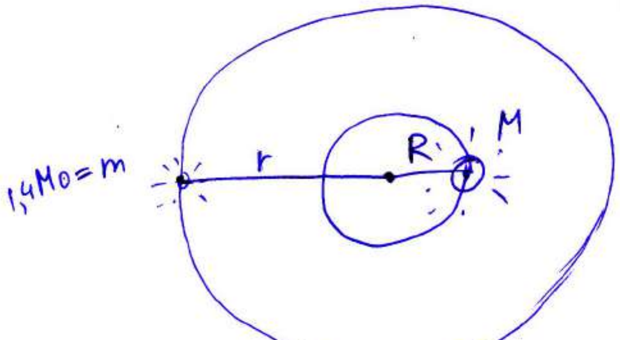
Найдём W_H: $\quad m_H = 2{,}5\lg\frac{2{,}5\cdot10^{-8}\,Вт/м^2}{W_H} \Rightarrow \frac{10^{\frac{m_H}{2,5}}}{1} = \frac{2{,}5\cdot10^{-8}\,Вт/м^2}{W_H}$

$$W_H = \frac{2{,}5\cdot10^{-8}\,Вт/м^2}{10^{\frac{m_H}{2,5}}} = \frac{2{,}5\cdot10^{-8}\,Вт/м^2}{10^{\frac{3{,}8^m}{2{,}5}}} \approx 2{,}5\cdot10^{-10}\,Вт/м^2$$

$$\lg 2{,}5\cdot10^{-10}\,Вт/м^2 = -9{,}6 \Rightarrow m = 5 + 2{,}5\lg e^{\frac{n\sigma h_{атм}}{\sin(\varphi + p\cos\omega t)}} =$$

$$= 5 + 2{,}5\lg e^{\frac{n\sigma\cdot 100\,км}{\sin(68^\circ58' + 20^\circ40'\cos(15^\circ/h\cdot t))}}$$

№4.



$\Delta t = 10^{-4}$ с − для н. зв.

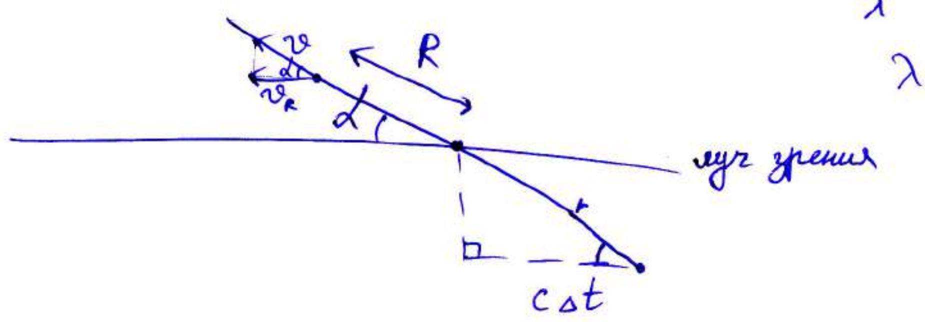
$\Delta\lambda = 0,5$ Å − для зв. ГП

$L = ?$

По з-ну Доплера:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_R}{c} \Rightarrow v_R = 25 \text{ км/с}$$

$\lambda = 6563$ Å



$$\frac{v_R}{v} = \frac{\cos\alpha}{1} \qquad \frac{c\Delta t}{r} = \frac{\cos\alpha}{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{v_R}{v} = \frac{c\Delta t}{r} \qquad v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\frac{T v_R}{2\pi \cancel{R}} = \frac{c\Delta t\, m}{M \cancel{R}} \qquad \frac{r}{R} = \frac{M}{m} \Rightarrow r = \frac{MR}{m}$$

$$(1) \quad \boxed{\frac{v_R T}{2\pi} = \frac{c\Delta t\, m}{M}}$$

По 3 з-ну Кеплера:

$$T^2 = \frac{(r+R)^3}{(M+m)}$$

Нейтронная звезда уже прозволюционировала

$$\Downarrow$$

$$m > M \Rightarrow M + m \approx m$$

$$R < r \Rightarrow (r+R)^3 \approx r^3$$

$$T = \sqrt{\frac{(c\Delta t)^3}{1,4}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{3\cdot 10^5 \text{ км/с} \cdot 10^{-4} \text{ с}}{\cancel{50}\,150 \cdot 10^6 \text{ км}} \text{ а.е.}\right)^3}{1,4}} = \sqrt{\frac{(2\cdot 10^{-7} \text{ а.е.})^3}{1,4}} = \sqrt{\frac{8\cdot 10^{-21}}{1,4}} \text{ г} \approx 2,2\cdot 10^{-10} \text{ г.}$$

Оценочно примем $\alpha = 0$.

Тогда: $r = c\Delta t$

$$T = \frac{2\pi R}{v_R} \Rightarrow \frac{2\pi R}{\cancel{2\pi}} = \frac{c\Delta t\, m}{M}$$

$$M = \frac{c\Delta t\, m}{R} = \frac{r m}{R}$$

№5.

По З-ну Бугера-Ламберта-Бэра:

$\Delta m = l\,k$

~~не~~ константа поглощения $\left[\frac{m}{м}\right]$ или км, как удобно

$$m = m_0 + kl$$
$$m_0 = 3{,}8^m$$
$$l = \frac{h_{атм}}{\sin(\varphi + p\cos\omega t)}$$
$$\Rightarrow m = 3{,}8^m + \frac{k \cdot 100\,км}{\sin(\varphi + p\cos\omega t)}$$

Ответ: $m = 3{,}8 + \dfrac{k \cdot 100\,км}{\sin(68^\circ 58' + 20^\circ 40' \cos(15^\circ/h \cdot t))}$

или

$$\frac{n\sigma \cdot 100\,км}{\sin(68^\circ 58' + 20^\circ 40' \cos(15^\circ/h \cdot t))}$$

$m = 5 + 2{,}5 \lg e$

это не $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, это $2{,}718281828459045235\ldots$

Причём максимальная яркость будет в верхней кульминации, а минимальная — в нижней.

P.S. Уважаемые проверяющие, извиняюсь за то, что аккуратность почерка оказалась обратно пропорциональна номеру задачи

№1.

НАГ-7
стр. 1

Дифракционный предел:

$$\alpha_{min} = 1,22\,\frac{\lambda}{D}$$

$\lambda = 3\cdot10^{3}\,\mathring{A} = 3\cdot10^{3}\cdot10^{-10}\,м = 3\cdot10^{-7}\,м.$

$$\alpha_{min} = 1,22\cdot\frac{3\cdot10^{-7}\,м}{2,4\,м} = 1,5\cdot10^{-7}\,рад.\cdot\frac{180^{\circ}}{\pi\,рад} = 90\cdot10^{-7\,\circ} = 9\cdot10^{-6\,\circ}\cdot3600''/^{\circ} = 3,2\cdot10^{-2}\,''$$

Мы рассматриваем исключительно α_{min}, потому что Хаббл – космический телескоп и глазом в него никто не смотрит.

Ответ: $\alpha_{min} = 3\cdot10^{-2}\,''$

№4.

Суть задачи в том, чтобы каким-то образом определить период системы, подставить в формулу (1) на стр. 8 и оттуда выразить М. Далее применяем широко известный факт для звёзд ГП:

$$L \propto M^{4}$$

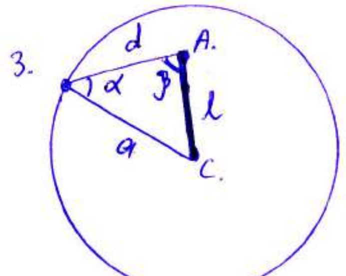
И сравниваем с Солнцем:

$$\frac{L}{3,8\cdot10^{26}\,Вт} = \frac{M^{4}}{(2\cdot10^{30}\,кг)^{4}}$$

Таким образом, вклад нейтронной звезды в видимую светимость пренебрежим.

№2.

$R = 50$ м. $\quad m = ?$
$l = 0{,}866$ а.е. $\quad m \vee m_{max} = ?$
$\angle\alpha = 60^\circ$
$D = 50$ см.



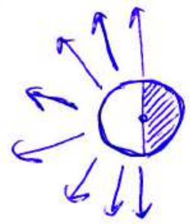
Найдём поток, падающий на астероид:

$$W_1 = \frac{L_\odot}{4\pi l^2} \quad [\text{Вт}/\text{м}^2]$$

Найдём поток, падающий от астероида на Землю:

$$W_2 = \frac{W_1 \cdot \pi R^2 \cdot \varepsilon \cdot \varphi}{2\pi d^2}$$

1) будем приближённо считать, что свет, отражённый от астероида падает на полусферу (на самом деле должна стоять не 2, а что-то между 2 и 4, но с моей точностью ~~[illegible]~~ это несущественно)



Альбедо Луны я не помню...
Пусть будет $\varepsilon = 0{,}5$!

Найдём фазу.

$$\varphi = \frac{1+\cos\beta}{2}$$

2) и ещё приближение: астероид — шар

По т. Синусов:

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{l}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\beta = \frac{a\sin\alpha}{l} = \frac{1\,\text{а.е.}\cdot\sin 60^\circ}{0{,}866\,\text{а.е.}} = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 0{,}866} \approx 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}$$

Найдём d по т. синусов:

$$\frac{d}{\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{=\cos\alpha}} = \frac{a}{\underbrace{\sin\beta}_{=1}} \Rightarrow d = a\cos\alpha = 1\,\text{а.е.}\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\,\text{а.е.}$$

$$W_2 = \frac{L_\odot \pi R^2 \varepsilon\varphi}{4\pi l^2\cdot 2\pi d^2} = \frac{L_\odot R^2\varepsilon\varphi}{8\pi l^2 d^2} = \frac{3{,}8\cdot 10^{26}\,\text{Вт}\cdot(50\,\text{м})^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{8\cdot 3{,}1\cdot\left(0{,}866\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}\,\text{м}\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}\,\text{м}\right)^2} =$$

$$= \frac{3{,}8\cdot 10^{26}\,\cancel{25}\cdot 10^2\cdot 0{,}25}{\cancel{24{,}8}\,(9{,}89\cdot 10^{21})^2}\,\text{Вт}/\text{м}^2 = \frac{3{,}8\cdot 25\cdot 10^{26}}{(10^{22})^2}\,\text{Вт}/\text{м}^2 = \frac{10^{28}}{10^{44}}\,\text{Вт}/\text{м}^2 = 10^{-16}\,\text{Вт}/\text{м}^2$$

По 3-му Погсона:

$$m_1 - m_2 = 2{,}5\lg\frac{W_2}{W_1} \Rightarrow$$ Сравним с Вегой:

$$m = m_B + 2{,}5\lg\frac{W_B}{W} \Rightarrow m = 0^m + 2{,}5\lg\frac{2{,}5\cdot 10^{-8}\,\text{Вт}/\text{м}^2}{10^{-16}\,\text{Вт}/\text{м}^2} =$$

$$= 2{,}5\lg\left(\frac{5}{2}\cdot 10^8\right) = 2{,}5\lg\frac{5}{2} + 2{,}5\lg 10^8 = 2{,}5\cdot 0{,}4 + 2{,}5\cdot 8 = 21^m$$ — звёздная величина астероида