 СПБ-232

№1.

Радиус геостационарной орбиты равен ≈ 42000 км, а период спутника очевидным образом совпадает с периодом осевого вращения Земли и равен $T \approx 24$ ч.

В таком случае, начальная скорость спутника на геостационарной орбите составит: $v = \frac{2\pi R}{T} \approx$
$\approx \frac{6{,}3 \cdot 42000 \text{ км}}{24\text{ч} \cdot 60\text{м} \cdot 60\text{с}} \approx \frac{42000 \text{ км}}{24\text{ч} \cdot 10 \cdot 60\text{с}} \approx \frac{42000 \text{ км}}{14400 \text{ с}} \approx$
$\approx \frac{480 \text{ тыс. км}}{86400 \text{ с}} \approx 5$ км/с.

Предполагаемый первый импульс должен был увеличить круговую скорость на 10% или в 1,1 раз, то бишь уменьшить орбитальный период:

$v_I = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}$, $\Rightarrow$ $v_I \cdot 1{,}1 \equiv \frac{(R+h)}{1{,}1^2} = \frac{R+h}{1{,}21}$, что согласно третьему закону Кеплера $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}\right)$ приведёт к уменьшению периода в $\sqrt{(1{,}21)^3}$ раз или $\approx \sqrt{1{,}7}$ раз $\approx 1{,}3$ раз.

Период на промежуточной орбите составил бы ≈ 18 ч.

~~Затем уменьшая скорость на 10%, наоборот, увеличиваю период~~

Нынешний радиус орбиты составляет $\frac{42000 \text{ км}}{1{,}21} \approx 35000$ км.

На новой орбите, после уменьшения скорости на 10%

Тут я вдруг понял, что необязательно считать так долго

В предполагаемом случае, приняв начальную орбиту за x, её радиус после двух переходов составит:

Т.к. итоговая круговая скорость стала $(V_I + 10\%) - 10\% = 0,99 V_I$ или $\frac{99}{100} V_I$, то итоговая радиус орбиты стала в $\frac{100^2}{99^2}$ больше, итоговый период в $\sqrt{\left(\frac{100^2}{99^2}\right)^3}$ больше и в итоге составил $T \cdot \frac{10^6}{99 \cdot 99 \cdot 99} \approx \frac{100000}{97000} \approx \frac{100}{97} T$

В случае перепутанных местами изменений скорости, итоговый период, наоборот, уменьшится относительно начального в $\frac{97}{100}$ раз. Итоговая разность ожидаемых периодов составит $\frac{6}{100} T$ или $\frac{6}{100} \cdot 24ч = \frac{144ч}{100} \approx 1,44ч \approx 60м + 27м \approx 87$ минут.

Ответ: 1,45 часа или 87 минут.

Найдем ~~сидерический период~~ радиус орбиты заданной планеты:

$$M[M_\odot]\cdot T^2[\text{года}] = a^3[\text{а.е.}], \Rightarrow a = \sqrt[3]{2\cdot 4^2} = \sqrt[3]{32} \approx 3{,}1\text{а.е.}$$

Орбита планеты круговая, $\Rightarrow R = const = a = 3.1$а.е.

Т.к. звезда находится на главной последовательности, ее массу и светимость можно считать пропорциональными солнечным:

$$L = L_\odot\cdot\frac{M}{M_\odot} = 2L_\odot \approx 7{,}76\cdot 10^{26}\text{Вт}.$$

Считая, что звезда излучает сферически-симметрично, на единицу площади на расстоянии 3,1 а.е. от нее энергия составит:

$$E_0 = \frac{4L}{3\pi r^3} \approx \frac{L}{3r^3} \approx \frac{7{,}76\cdot 10^{26}}{3\cdot(3{,}1)^3\cdot(1{,}5)^3\cdot 10^{33}} \approx \frac{10^{26}}{32\cdot 10^{33}} \approx \frac{10^{26}}{3\cdot 10^{34}} \approx$$

$\approx$ оч мало.

Точнее будет посчитать, помня солнечную постоянную ($\approx 1360/м^2$) на Земле и сравнив приведенные условия с земными:

$$\frac{E_0}{E_\oplus} = \frac{L}{L_\odot}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 = 2\cdot\frac{1}{32} = \frac{1}{16}, \Rightarrow E_0 = \frac{1}{16}\cdot 1360/м^2 \approx 90\,\text{Вт}/м^2$$

Стало быть, в момент, когда солнечная батарея перпендикулярна к направлению на светило, она будет получать $E = E_0 S = 9000\,\text{Вт}$ в секунду.

Т.к. ось планеты перпендикулярна орбите, а батарея установлена на экваторе, можно с хорошей точностью сказать, что светило будет над горизонтом 10 часов в сутки ($\frac{1}{2}T$).

Однако в течении этого времени „эффективная" площадь батареи будет изменяться (например, в моменты захода и восхода батарея вообще не будет получать энергии)

Количество принимаемой энергии будет ~~подсчи~~ подсчитываться как $E = E_0 \cdot \cos h$, где h – высота светила над горизонтом.

В таком случае можно „отбросить" высоты от 0 до 30° (на высоте $h = 30°$ падение принимаемой энергии будет уже в 2 раза, а дальше энергия будет „падать" все быстрее)

В таком случае, продолжительная „эффективного" сеанса наблюдения составит $10ч \cdot \frac{30+30°}{180°} \approx 7ч$.

Итоговая оценка принимаемой энергии с учётом $\cos h$ составит:

$$E \approx E_0 \cdot t_{ef} \cdot \langle \cos h \rangle \approx 9 \cdot 10^7 \text{ Вт}.$$

С учётом эффективности самой батареи (10%) итоговая энергия составит:

$$E' = E \cdot 0{,}1 \approx 9 \cdot 10^6 \text{ Вт}.$$

Ответ: $9 \cdot 10^6$ Вт.

 СПб-232.

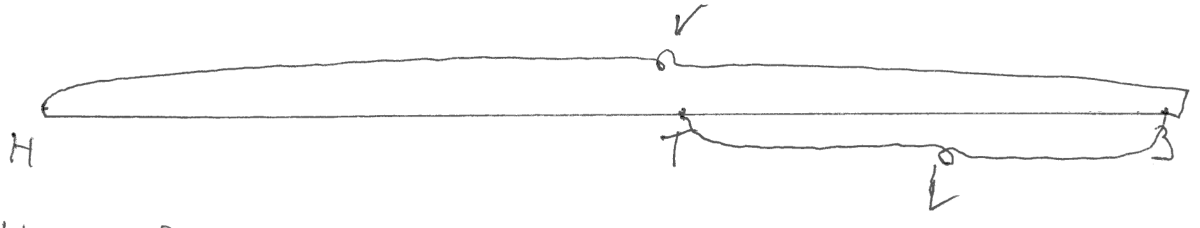
№4.

Следует отметить, что яркость туманности по большому счёту обусловлена светом, отражаемым туманностью от звезды, в результате чего из равенства видимой освещённости от туманности и звезды следует, что туманность находится ближе к нам, чем звезда. Светимость ~~зв~~ звезды можно найти, сравнив её с "абсолютным" Солнцем (видимая яркость звезды и абсолютная яркость Солнца удобно отличаются на 1^m, что означает разницу освещённостей в 2,512 раза):

$$\frac{E}{E_\odot} = \frac{1}{2{,}5} = \frac{L}{L_\odot} \cdot \frac{10^2 пк^2}{310^2 пк^2}, \Rightarrow L = \frac{310^2}{250} \cdot L_\odot \approx$$

$$\approx \frac{960000}{250} \approx \frac{9600}{2{,}5} \approx \frac{19200}{5} \approx \frac{38400}{10} \approx 3850 L_\odot.$$

При этом направление на небе на туманность и звезду примерно совпадают, а значит с хорошей точностью можно считать, что расстояния до туманности и звезды откладываются вдоль одной прямой!



Н – наблюдатель
Т – туманность
З – звезда

r – расстояние от наблюдателя до звезды
l – расстояние между туманностью и звездой

Освещённость, принимаемая туманностью от звезды равна

$E_0 = \frac{L}{4\pi l^2} \cdot 2\pi R^2$ (считая туманность визуально шариком, принимающим свет половиной своей площади, обращённой к звезде).

Наблюдатель на Земле видит этот свет в $\left(\frac{r}{l-r}\right)^2$ раз ярче (т.к. линейные размеры туманности постоянны, и её видимые угловые размеры пропорциональны расстоянию до наблюдателя (обратно-пропорциональны).

Сама же освещённость от звезды на Земле составляет:

$E_1 = \frac{L}{4\pi r^2}$.

В таком случае:

$E_1 = E_2$

$\frac{L}{4\pi r^2} = \frac{2\pi L}{4\pi l^2} \cdot \frac{r^2}{(l-r)^2}$, $\Rightarrow$ $\frac{L}{4\pi r^2} = \frac{2\pi L r^2}{4\pi l^2 (l-r)^2}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{r^2} = \frac{2\pi r^2}{l^2(l-r)^2}$, $\Rightarrow$ $l^2(r-l)^2 = 2\pi r^4$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow l^2 r^2 - 2rl^2 + l^4 = 2\pi r^4$.

$l^2(r^2 - 2r) + l^4 = 2\pi r^4$

Пусть $l^2 = x$.

$x(r^2 - 2r) + x^2 = 2\pi r^4$

$x(0{,}09 - 0{,}31) + x^2 = 6{,}3 \cdot 0{,}31^4$

$x^2 - 0{,}22x \approx 5 \cdot 10^{-4}$

$x^2 - 0{,}22x - 5 \cdot 10^{-4} = 0$

$4x^2 - x - 2 \cdot 10^{-3} = 0$

$D = 1 + 3{,}2 \cdot 10^{-2} \approx 1{,}032$, $\sqrt{D} \approx 1{,}006$.

$x = \frac{1 + 1{,}006}{8} \approx 0{,}25$ кпк.

$\Rightarrow$ расстояние от туманности до звезды ≈ 60 парсек.

Ответ: 60 пк.

№2.

Начнём с того, что на этой широте Сириус, действительно, может находится над горизонтом:
$h_{в.к.} = 90° - |\varphi - \delta| = 45°$.
Отметим, что в новогоднюю полночь Солнце находится в нижней кульминации, в то же время имея прямое восхождение примерно:
$\alpha = 18^h + 4^m \cdot n \approx 18^h 40^m$, где n - число прошедших дней после зимнего солнцестояния.
Можно заметить, что прямые восхождения Сириуса и Солнца в этот момент с хорошей точностью отличаются на 12^h, а значит Сириус будет вблизи своей верхней кульминации, как раз на высоте около $45°$ над горизонтом.
За 30 секунд герои анекдота преодолеют 30 метров, то есть сместятся по широте на $\frac{0{,}03 км \cdot 360°}{40000 км} \approx$
$\approx \frac{1}{400}$ градуса, что на такую же величину опустит Сириус. Земля же, за 30 с довернувшись вокруг оси, опустит его ещё на $0{,}125°$ $(\frac{1}{8})$, значит собственным перемещением героев анекдота можно пренебречь.

«приведённая» толщина атмосферы на луче зрения также изменится, что приведёт к тому, что Сириус станет, и правда, немного ярче.

$= \frac{L_0}{L} = \cos\alpha = \cos(0{,}125^\circ) = \cos(8') \approx$

$\approx \frac{1-\cos 8^\circ}{60}$.

Таким образом, изменение принимаемой освещённости составит буквально десятых доли процента, а т.к. изменению видимой звёздной величины в 1^m соответствует изменение освещённости в 2,512 раза, δm составит порядка 10^{-5} или $\approx 0{,}00001^m$.

Ответ: $0{,}00001^m$.

№5.

Ускорение свободного падения на поверхности нейтронной звезды составит: $\frac{g}{g_\oplus} = \frac{M}{m_\oplus} \cdot \frac{R_\oplus}{R} = \frac{1{,}4 M_\odot}{1 m_\oplus} \cdot \frac{6400\,\text{км}}{10\,\text{км}} =$

$= \frac{5\cdot10^5 m_\oplus}{m_\oplus} \cdot 640 \approx 3{,}2\cdot10^8$, $\Rightarrow g \approx 3{,}2\cdot10^8 g_\oplus$

Давление магнитного поля на границе магнитосферы будет минимальным, т.к. там будет минимум индукции магнитного поля (т.к. $B \sim r^{-3}$).

При этом не на поверхности звезды ускорение свободного падения (и, следовательно, давление аккрецирующего) вещества будет уменьшено в $\frac{R}{R+h}$ раз, где h — высота над поверхностью звезды.

Давление же магнитного поля будет уменьшатся в $\left(\frac{R}{R+h}\right)^3$ раз.

Таким образом, можно записать соотношение:

$$g_\oplus \cdot 3{,}2\cdot 10^8 \cdot \frac{R}{R+h} = 4\cdot 10^5 \cdot \frac{R^3}{(R+h)^3}$$

, т.к. в заданной точке давление аккрецирующего вещества и магнитного поля уравновешены.

$$\frac{3{,}2\cdot 10^9 R}{R+h} = \frac{4\cdot 10^5 R^3}{(R+h)^3}$$

$$3{,}2\cdot 10^9 R\cdot (R+h)^3 = 4\cdot 10^5 R^3 \cdot (R+h)$$

$$3{,}2\cdot 10^9 \cdot (R+h)^2 = 4\cdot 10^5 R^2$$

$$\approx \frac{(R+h)^2}{R^2} \approx 10^4, \Rightarrow h \approx 10^2 R \approx 1000\text{ км}.$$

Ответ: радиус магнитосферы около 1000 км.