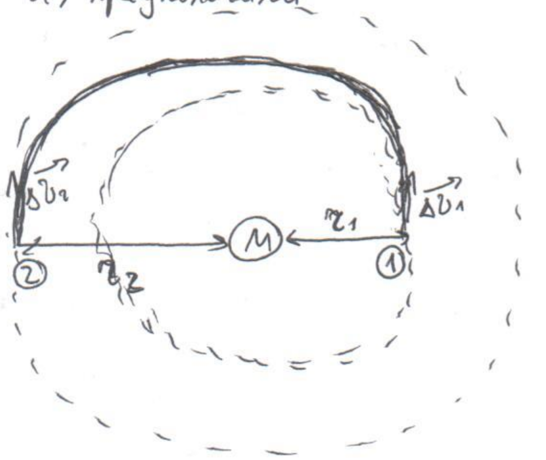
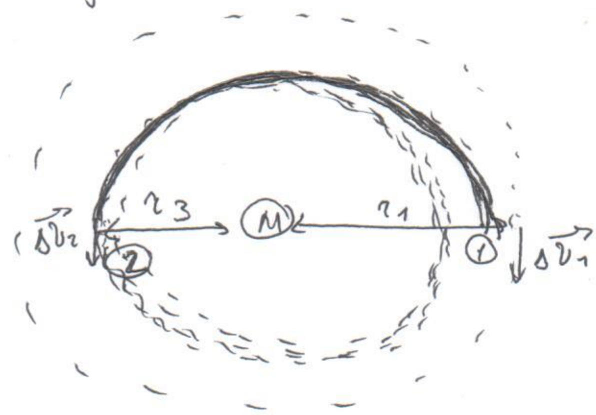
Задача № 1

а) предполагали



б) получилось



В начале движения скорость спутника в обоих случаях равнялась $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

а) • после Δv_1:

$v_1 = 1{,}1\, v_0 = 1{,}1\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

• перелёт по эллипсу Гомана:

$v_2 = \frac{1-e}{1+e} v_1 = 1{,}1 \frac{1-e}{1+e}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

• после Δv_2:

$v_k = 0{,}9 \cdot v_2 = 0{,}9 \cdot 1{,}1 \frac{1-e}{1+e}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

б) • после Δv_1

$v_1 = 0{,}9\, v_0 = 0{,}9\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

• перелёт по эллипсу:

$v_2 = \frac{1+e}{1-e} v_1 = 0{,}9 \frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

• после Δv_2:

$v_k = 1{,}1\, v_2 = 1{,}1 \cdot 0{,}9 \frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

Стоит отметить, что эксцентриситеты перелётных орбит не равны (как и большие полуоси)

а) скорость в точке 1:

$\sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \cdot 1{,}1$

$\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e} = 1{,}21 \cdot \frac{GM}{a(1-e)}$

$1+e = 1{,}21$

$\boxed{\begin{array}{c} e = 0{,}21 \\ \text{в случае (а)} \end{array}}$

б) скорость в точке 1:

$\sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}} = 0{,}9\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

$\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e} = 0{,}81 \frac{GM}{a(1+e)}$

$1-e = 0{,}81$

$\boxed{\begin{array}{c} e = 0{,}19 \\ \text{в случае (б)} \end{array}}$

Яро – 3

Найдём отношение начального радиуса орбиты к конечному в каждом случае:

а) $v_к = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$

$$v_к = 0{,}9 \cdot 1{,}1 \cdot \frac{1-0{,}21}{1+0{,}21}\sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$$

$$0{,}64\sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{r_1}{r_2} = 0{,}41$$

б) $v_к = \sqrt{\frac{GM}{r_3}}$

$$v_к = 1{,}1 \cdot 0{,}9\,\frac{1+0{,}19}{1-0{,}19}\sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \sqrt{\frac{GM}{r_3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{r_1}{r_3} = 2{,}7$$

Выразим большие полуоси в каждом случае:

а) $a_1 = \frac{r_1+r_2}{2} = r_1\frac{1+0{,}41}{2} = 0{,}705\,r_1$

б) $a_2 = \frac{r_1+r_3}{2} = r_1\,\frac{1+\frac{1}{2{,}7}}{2} = \frac{3{,}7}{5{,}4}\,r_1 \approx 0{,}67\,r_1$

По 3-му закону Кеплера:

$$\frac{MT_1^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{G} \quad => \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a_1^3}{GM}}$$

$$\frac{MT_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{G} \quad => \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a_2^3}{GM}}$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a_1^3}{GM}} - 2\pi\sqrt{\frac{a_2^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}705^3 r_1^3}{GM}} - 2\pi\sqrt{\frac{0{,}67^3 r_1^3}{GM}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{GM}}\left(\sqrt{0{,}705^3} - \sqrt{0{,}67^3}\right)$$

Заметим, что $\sqrt{\frac{r_1^3}{GM}} = \frac{1}{\omega}$ для спутника на начальной орбите $=> \omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ рад/час (геостационарный)

$$\Delta T = 2\pi \cdot \frac{12}{\pi}\left(\sqrt{0{,}705^3} - \sqrt{0{,}67^3}\right) \approx 1 \text{ час}$$

Ответ: 1 час

Задача № 3

1) Определим светимость звезды и радиус орбиты планеты:

Звезда на главной последовательности:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4 \Rightarrow \quad L = 16 L_\odot = 16\cdot 3{,}88\cdot 10^{26} = 62\cdot 10^{26} \text{ Вт}$$

По 3-му закону Кеплера:

$$\left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^3 = \frac{M}{M_\odot}\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2$$

$$a = \sqrt[3]{2\cdot 4^2} = \sqrt[3]{32} \approx 9{,}2 \text{ ае} = 9{,}2\cdot 1{,}5\cdot 10^{11} = 1{,}4\cdot 10^{12} \text{ м}$$

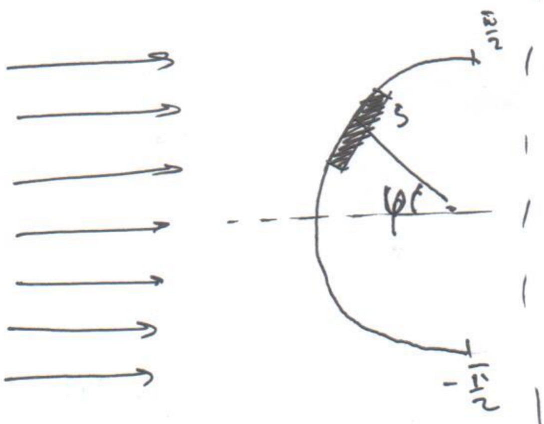
2) Угловая скорость вращения планеты:

$$\omega = \frac{2\pi}{20\cdot 3600} = \frac{\pi}{3{,}6\cdot 10^4}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

3) Найдём количество световой энергии, которое попадёт на батарею за 1 её оборот.

Освещённость от звезды на планете: $J = \frac{L}{4\pi a^2}$

За малое время:



$$dE = J S \cos(\omega t)\, dt$$

$$E_{полн} = 2\frac{LS}{4\pi a^2}\int_0^{T/4}\cos(\omega t)\,dt$$, где T – период обращения планеты вокруг оси

$$\int_0^{T/4}\cos(\omega t)\,dt = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\Big|_0^{T/4} = \frac{1}{\omega}$$

$$E_{полн} = \frac{LS}{2\pi a^2 \omega}$$

Батарея имеет КПД $\eta = 0{,}1$, значит $W = \eta E_{полн} = \frac{\eta L S}{2\pi a^2 \omega}$

$$W = \frac{0{,}1\cdot 62\cdot 10^{26}\cdot 100\cdot 3{,}6\cdot 10^4}{2\pi\cdot 1{,}4^2\cdot 10^{24}\cdot \pi} = \frac{62\cdot 3{,}6\cdot 10^{31}}{2\cdot 1{,}4^2\cdot 10^{25}} = 55{,}7\cdot 10^6 \text{ Дж}$$

Ответ: $55{,}7\cdot 10^6$ Дж

Задача 5

1) Формула Планка для излучения фотонов:

$$E = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{E}{h} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi E}{h}$$

2) Вращение свободного электрона в магнитном поле:

$$e v B_0 = \frac{m v^2}{R}$$

$$v = \frac{e B_0 R}{m} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{e B_0}{m} = \frac{2\pi E}{h}$$

$$\boxed{B_0 = \frac{2\pi E m}{e h}}$$

На границе нейтронной звезды электроны сходят с орбиталей и разрушаются ядра атомов (свободные электроны)

3) Оценим $B_0 \approx \dfrac{2\pi \cdot 30 \cdot 10^{3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-30}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,626 \cdot 10^{-34}} \approx \underline{3 \cdot 10^{8}\ Тл}$

4) Оценим зависимость давления аккреционного вещества:

$$p = nkT$$

Примем $T = const$ и ламинарное движение слоёв.

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (R + \Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{4\pi}{3} R^2 \Delta R$$

$n = \dfrac{N}{\Delta V} \propto \dfrac{1}{r^2}$, где N - количество частиц в слое ΔV

Значит, $p = \dfrac{n_0 k T r_0^2}{r^2}$, где $\boxed{k \text{ - постоянная Больцмана}}$

n_0, r_0 - концентрация частиц и соответствующий радиус (10км)

5) Зависимость давления магнитного поля:

$p_M = æ B_0^2 \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^6$, где $\boxed{æ = 4 \cdot 10^5\ Па/Тл^2}$

$r_0 = 10км$

6) $p_M = p$

$$æ B_0^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 = \frac{n_0 k T r_0^2}{r^2}$$

Откуда получим: $r = r_0 \sqrt[4]{\dfrac{æ B_0^2}{n_0 k T}}$

7) Определим n_0 – на поверхности нейтронной звезды

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{M}{2m_p \frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{3M}{8\pi m_p r_0^3} = \frac{3\cdot 1{,}4\cdot 2\cdot 10^{30}}{8\cdot 3{,}14\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 10^{12}} \simeq 5\cdot 10^{44}$$

8) Оценим: $r = r_0 \sqrt[4]{\frac{4\cdot 10^5\cdot 9\cdot 10^{16}}{5\cdot 10^{44}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 10^4}} \approx 0{,}2\, r_0$

Результат абсолютно противоречивый, однако, звезда создаёт также давление ~~света~~ излучения, действующее на вещество. Т.к. оптическая толщина аккреционного вещества огромна ($\tau \sim 1000$) и светимость звезды близка к критическому пределу Эддингтона, то результат может оказаться

$r \approx 100\, r_0 = 1000$ км

~~Задача № 4~~

~~Разница абсолютной и видимой звёздной величины звезды без поглощения света по формуле Погсона: $\Delta m = 2{,}5 \lg\left(\frac{d}{10\,пк}\right)^2 = 5\lg\left(\frac{3{,}1\cdot 10^2}{10}\right) \approx 15^m$~~

Задача № 4

Рассчитаем видимую звёздную величину с $d = 0{,}31$ кпк для звезды:

$$m = M + 5\lg\left(\frac{d}{10\,пк}\right) = -2{,}5^m + 5\lg\left(\frac{31}{1}\right) \approx -2{,}5 + 15 = 12{,}5^m$$

~~Реальная видимая звёздная величина $5{,}7^m$, значит, туманность находится между звездой и наблюдателем~~

Задача № 2

Изменение звёздной величины Сириуса за счёт физического приближения / отдаления пренебрежимо мало.

За счёт перемещения можно незначительно уменьшить геоцентрический параллакс звезды и, как следствие, зенитное расстояние.

В зависимости от z атмосфера обладает различной пропускающей способностью для различных лучей (по цвету). Если Сириус поднимется над горизонтом, то его зв. величина уменьшится (станет более ярким), т.к. синие лучи лучше проходят при меньших z.