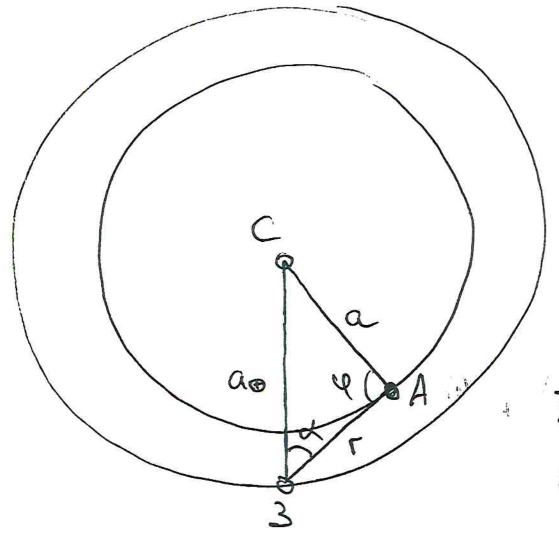
№2



Для начала нарисуем рисунок:
С - Солнце
З - Земля
А - астероид
Теперь оценим фазовый угол φ астероида:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a_\oplus}{\sin\varphi}$$

$$\sin\varphi = \frac{a_\oplus}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{0{,}866} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Заметим, что $\sqrt{3} \approx 1{,}7 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}85 \Rightarrow \sin\varphi \approx 1$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi \approx 90^\circ}$$

Тогда мы легко можем найти фазу астероида

$$F = \frac{1+\cos\varphi}{2} = \frac{1}{2}$$

Теперь распишем освещенность, создаваемую астероидом на Земле:

$$E = \frac{L_\odot}{4\pi a^2} \cdot \pi R^2 \cdot \frac{A \cdot F}{4\pi r^2}$$

Чтобы избавиться от альбедо, сравним освещенность астероида с освещенностью от полной Луны

$$E_D = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} \cdot \pi R_D^2 \cdot \frac{A \cdot}{4\pi a_D^2}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{E_D} = \left(\frac{a_\oplus}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{R}{R_D}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_D}{r}\right)^2 \cdot F$$

Осталось лишь оценить расстояние до астероида r

$$r = \sqrt{a_\oplus^2 - a^2} = \sqrt{1 - 0{,}866^2}$$

$$0{,}866^2 \approx 0{,}75 \quad \Rightarrow r = \sqrt{1-0{,}75} = 0{,}5 \text{ а.е.}$$

Далее подставим отношение освещенностей в формулу Погсона:

$$\frac{E}{E_D} = 10^{0{,}4(m_D - m)} \quad \Rightarrow m = m_D - 2{,}5\lg\frac{E}{E_D}$$

$$m = m_D - 5\lg\frac{R}{R_D} \cdot \frac{a_\oplus}{a} \cdot \frac{a_D}{r} - 2{,}5\lg F$$

$$\frac{R}{R_D} \cdot \frac{a_\oplus}{a} \cdot \frac{a_D}{r} = \frac{50}{1738 \cdot \cancel{10^3}} \cdot \frac{1}{0{,}866} \cdot \frac{384000 \cdot \cancel{10^3}}{0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 4}{1{,}7 \cdot 10^3 \cdot 0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^{11}} =$$

$$= \frac{8 \cdot 10^7}{\frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10^{14}} \approx 2 \cdot 10^{-7}$$

$-2{,}5\lg\frac{1}{2} = \overset{-2{,}5\lg F}{\cancel{}} = 2{,}5\lg 2$

$m = -12{,}7 - 5\lg 2 - 5\lg 10^{-7} + 2{,}5\lg 2$

зв. величина Луны в полнолунии

$\lg 2 \approx 0{,}3$

$m = -12{,}7 - 2{,}5\cdot 0{,}3 + 5\cdot 7 \approx 35 - 13{,}5 \approx \boxed{21{,}5^m}$

Мы нашли звездную величину астероида. Теперь оценим проницательную способность телескопа с $D = 50$ см

$m_{пр} = \underset{6^m}{m_0} + 5\lg\frac{D}{d_r} = 6 + 5\lg\frac{500}{6} \approx \boxed{16^m}$

Как видно, $m_{пр} < m$ => в этот телескоп астероид не не увидим.

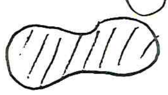
№1

Найдем дифракционный предел телескопа. Атмосферными эффектами пренебрежем, т.к. телескоп находится вне атмосферы.

$\beta^{['']} = \frac{1{,}22\lambda}{D} = \frac{1{,}22\cdot 3\cdot 10^{3}\cdot 10^{-10}}{2{,}4}\cdot 206265'' \approx \frac{\cancel{12{,}2}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 10^{5}\cdot 10^{-7}}{\cancel{24}} \approx$

$\approx 3\cdot 10^{-2}$

Однако при угловом расстоянии β между компонентами (согласно критерию Релея), двойная звезда будет выглядеть как-то так:



Раз уж в условии сказано, что разрешить удалось уверенно, оценим угловое расстояние в 2 дифракционных предела

$\rho = 2\beta \approx \boxed{0{,}06''}$

№3

Раз в двойной системе происходит аккреция, значит большая звезда (а именно основной компонент системы) заполнила полость Роша {- эквипотенциальную поверхность, содержащую точку L1

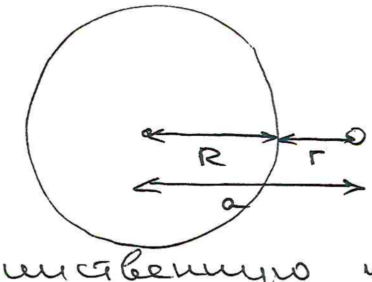
Расстояние от меньшего компонента (белого карлика) до первой точки Лагранжа

$r = a\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{3(M+m)}}$

Здесь a - большая полуось системы

m - масса БК

M - масса основного компонента



$$r = a - R$$

$$a\sqrt[3]{\frac{m}{3(M+m)}} = a - R$$

Из этого выражения выразим единственную неизвестную - массу основного компонента

$$\sqrt[3]{\frac{m}{3(M+m)}} = 1 - \frac{R}{a}$$

$$\frac{m}{M+m} = 3\left(\frac{a-R}{a}\right)^3$$

$$M = \frac{\left(1 - 3\left(\frac{a-R}{a}\right)^3\right)m}{3\left(\frac{a-R}{a}\right)^3} = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a-R}\right)^3 - 1\right)m$$

Теперь посчитаем M в массах Солнца (т.к. $m = 1M_\odot$)

$$M^{[M_\odot]} \approx \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{0,14}{0,14-0,1}\right)^3 - 1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{14}{4}\right)^3 - 1 = \frac{343}{3\cdot 8} - 1 = \frac{319}{24} \approx 13,2\ M_\odot$$

Чтобы рассчитать плотность, разделим массу звезды на ее объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \frac{13,2\cdot 2\cdot 10^{30}\cdot \cancel{3}}{{}_2\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot (10^{-1}\cdot 1,5\cdot 10^{11})^3} = \frac{13,2\cdot \cancel{10^{30}}}{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot \cancel{10^{30}}} = \frac{4\cdot 13,2}{27} =$$

$$= \frac{52,8}{27} \approx \boxed{2\ \text{кг/м}^3}$$

№4

Чтобы оценить светимость системы в оптическом диапазоне, достаточно определить светимость звезды ГП, т.к. нейтронная звезда вносит пренебрежимо малый вклад по светимости в оптике. Оценить светимость звезды ГП можно используя соотношение масса-светимость

$$\left(\frac{L}{L_\odot}\right) = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4$$

Тогда нужно найти массу второго компонента системы (звезды ГП).

Итак, нам известно расщепление линии Hα, причем обнаружено оно в оптическом диапазоне, следовательно происходит из-за движения звезды ГП (далее ЗГП)

$\frac{V}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, где V - орбитальная скорость ЗГП

$\Delta\lambda = 0,5$ Å (по условию)

$\lambda = 6563$ Å - длина волны линии Hα

$c = 3\cdot 10^8$ м/с

Дел - 33

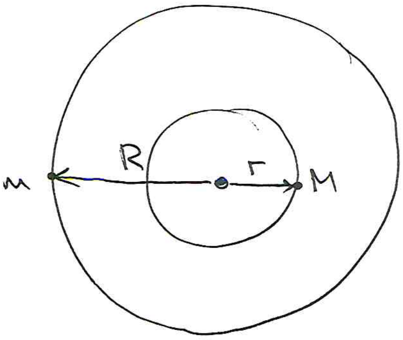
Найдем скорость V:

$$V = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\cdot c = \frac{0,5}{6563}\cdot 3\cdot 10^8 \approx \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 6,6\cdot 10^3} = \frac{10^5}{4,4} \approx 0,22\cdot 10^5 =$$

$$= 22\cdot 10^3\ м/с =$$

$$= 22\ км/с$$

Теперь расчитаем скорость ЗПП



M - масса нейтронной звезды
m - масса ЗПП

По III з. Кеплера для двойных систем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+r)^3}{G(M+m)}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}$$

С другой стороны, $V = \omega\cdot R$

$$V^2 = \frac{G(M+m)R^2}{(R+r)^3}$$

По правилу моментов $Mr = mR$

$$\Rightarrow r = \frac{m}{M}\cdot R$$

$$V^2 = \frac{G(M+m)R^2}{\left(\left(\frac{m}{M}+1\right)R\right)^3} = \frac{G(M+m)R^2M^3}{(M+m)^3\cdot R^3} = \frac{GM^3}{(M+m)^2\cdot R} \qquad (1)$$

~~Отсюда выразим m:~~

$$\cancel{m = \sqrt{\frac{GM^3}{R\cdot V^2}} - M}$$

Осталось только найти R

Известно, что период пульсации отклоняется от среднего на $\Delta t = 10^{-4}$ с. Это происходит из-за того, что при определенном положении нейтронной звезды на орбите свет от нее летит то больше, то меньше времени

$$\Rightarrow r = \Delta t\cdot c = 10^{-4}\cdot 3\cdot 10^8 = 3\cdot 10^4\ м$$

$$R = \frac{M}{m}r$$

Подставим R в (1)

$$V^2 = \frac{GM^3}{(M+m)^2\cdot\frac{M}{m}r} = \frac{GM^2m}{(M+m)^2\cdot r} \quad \Big| \div\frac{m^2}{m^2}$$

$$V^2 = \frac{GM^2}{mr\left(\frac{M}{m}+1\right)^2} = \frac{G\cdot\frac{M}{m}\cdot M}{r\left(\frac{M}{m}+1\right)^2}$$

Обозначим $\frac{M}{m} = \alpha$

$$\frac{V^2 \cdot r}{GM} = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2} = \beta$$ – еще одно обозначение

$$\alpha^2 \cdot \beta + 2\alpha\beta + \beta = \alpha \quad | : \beta$$

$$\alpha^2 + \alpha\left(2 - \frac{1}{\beta}\right) + 1 = 0$$

$$D = \left(2 - \frac{1}{\beta}\right)^2 - 4$$

Посчитаем численно β

$$\beta = \frac{(22\cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-4} \cdot 3\cdot 10^8}{6{,}7\cdot 10^{-11} \cdot 1{,}4 \cdot 2\cdot 10^{30}} = \frac{22^2 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{6{,}7 \cdot 1{,}4 \cdot 2 \cdot 10^{19}} = \frac{22\cdot 11\cdot 3}{9{,}4}\cdot 10^{-9} \approx$$

$$\approx 8\cdot 10^{-9}$$

~~Тогда $D \approx \beta^{-2} \approx 10^{16}$~~

$$\cancel{\alpha = \frac{-(2-\beta^{-1}) \pm \sqrt{D}}{2} \approx \frac{\beta^{-1} \pm \sqrt{\beta^{-1}}}{2}}$$

$$\cancel{\alpha_1 = \frac{10^8 \pm 10^4}{2} \approx 5\cdot 10^7}$$

$$\alpha = \frac{-\left(2-\frac{1}{\beta}\right) \pm \sqrt{\left(2-\frac{1}{\beta}\right)^2 - 4}}{2} \quad \Big| \cdot \frac{-2+\frac{1}{\beta}}{-2+\frac{1}{\beta}}$$

$$\alpha = \frac{+1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\left(2-\frac{1}{\beta}\right)^2}}}{2} \cdot \left(-2+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$\boxed{\sqrt{1 - \frac{4}{\left(2-\frac{1}{\beta}\right)^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\left(2-\frac{1}{\beta}\right)^2} \quad \left(\text{т.к. } 1 \gg \frac{4}{\left(2-\frac{1}{\beta}\right)^2}\right)}$$

$$\cancel{\alpha = \frac{1 \pm 1 \mp \frac{2}{\left(2-\frac{1}{\beta}\right)^2}}{2}\cdot\left(-2+\frac{1}{\beta}\right)}$$

$$\cancel{\alpha_1 = \frac{1}{-2+\frac{1}{\beta}}} \qquad \cancel{\alpha_2 = -2+\frac{1}{\beta} + \frac{1}{-2+\frac{1}{\beta}}}$$

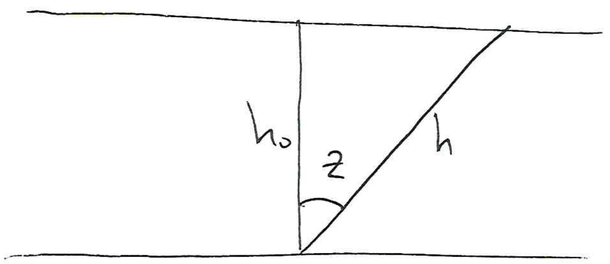
продолжение на листе 7

+

№5

В Мурманске звезда с таким склонением кульминирует почти в зените (т.к. $\varphi \approx \delta$). В зените атмосферное поглощение $\approx 0{,}2^m \Rightarrow m_z = 4^m$

Теперь рассмотрим зависимость атмосферного поглощения в плоском приближении:



$$\frac{h_0}{h} = \cos z$$ (z - зенитное расстояние)

$$\frac{\Delta m_0}{\Delta m} = \frac{h_0}{h} = \cos z$$

следствие из закона Бугера

$$\Rightarrow \Delta m = \Delta m_0 \cdot \cos^{-1} z$$

$$\Delta m \sim \frac{1}{\cos z}$$

Согласно сферической теореме косинусов

$$\cos z = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t$$

$$\Rightarrow \cos z \sim \cos t$$

$$\Rightarrow \Delta m \sim \frac{1}{\cos t}$$

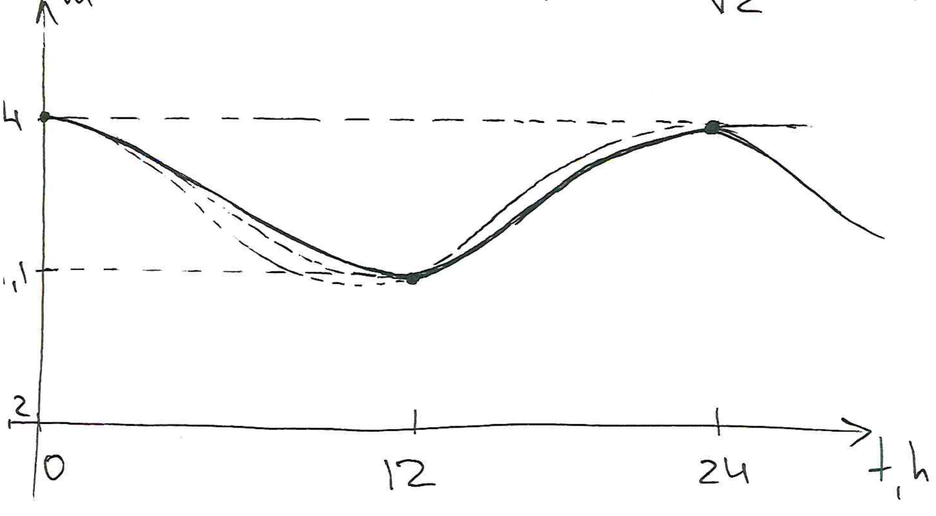
Найдем теперь предельные значения поглощений:

$\Delta m_0 = 0{,}2^m$ - в зените

$$h_{н.к.} = -90° + \varphi + \delta = -90° + 68°59' + 69°20' = 48°18'$$

Высота нижней кульминации близка к 45°

$$\Rightarrow \Delta m_{н.к.} \approx 0{,}2 \cdot \frac{1}{\cos 45} \approx \frac{0{,}4}{\sqrt{2}} \approx 0{,}3^m \Rightarrow m_{н.к.} = 4{,}1$$



(Получилось криво, но это честная работа)

$\sin 70 \approx 0{,}9$

$\sin^2 70 \approx 0{,}81$

$\cos 70 \approx 0{,}4$

$\cos^2 70 \approx 0{,}16$

$$\Rightarrow \cos z \approx 0{,}81 + 0{,}16 \cos t$$

$$\boxed{\Delta m = \frac{\Delta m_0}{0{,}81 + 0{,}16 \cos t}}$$

$$m = m_0 + \Delta m$$

$$\boxed{m = m_0 + \frac{\Delta m_0}{0{,}81 + 0{,}16 \cdot \cos t}}$$

6/7

Однако еще стоит сказать, что звезду будет видно не всегда, т.к. в Мурманске бывает полярный день. Рассмотрим дни равноденствий и солнцестояний:

21.03 : $\alpha_\odot = 0^h$, Солнце в в.к. | Солнце в н.к. на горизонте
звезда в н.к. | => звезду никогда не видно

23.09 : $\alpha_\odot = 12^h$, аналогично звезду не видно

22.06 : $\alpha_\odot = 6^h$, полярный день, звезду не видно

22.12 : $\alpha_\odot = 18^h$, полярная ночь, звезду видно

Нельзя дать однозначный ответ на задачу, т.к. для разных дней года видимость звезды разная, а учесть сумерки (а как следствие и засветку солнцем) достаточно сложно)

№4

$$\alpha_1 = \frac{1+1-\frac{2}{(2-\frac{1}{\beta})^2}}{2}\left(\frac{1}{\beta}-2\right) = \frac{1}{\beta} - 2 - \frac{1}{\frac{1}{\beta}-2} \approx \beta^{-1}$$

$$\alpha_2 = \frac{1-1.+\frac{2}{(2-\frac{1}{\beta})^2}}{2}\left(\frac{1}{\beta}-2\right) = \frac{1}{-2+\frac{1}{\beta}} \approx \beta$$