Шифр: Хим-3
Страница № 1

Задача N1.

Предельно понятно, что в данном контексте аккрецирующая масса M – это суммарная масса N почти одинаковых звезд, упавших на черную дыру, т.е. $M = NM_{\odot}$ (по условию, все эти звезды похожи на Солнце). Значит, энергия покоя этой массы $E_0 = Mc^2 = NM_{\odot}c^2$. Ясно, что мы засекли лишь энергию, выделившуюся ~~пр~~ в виде излучения $\Rightarrow$

$\Rightarrow E = \frac{E_0}{2} = 10^{55}$ Дж. Таким образом, мы получаем, что

$NM_{\odot}c^2 = 2E \Rightarrow N = \frac{2E}{M_{\odot}c^2}$. Это и есть конечная ф-ла.

С учетом $M_{\odot} = 2\cdot10^{30}$ кг и $c = 3\cdot10^8 \frac{м}{с}$, получим итоговый ответ в виде $N = \frac{2\cdot10^{55}}{2\cdot10^{30}\cdot9\cdot10^{16}} = \frac{10^{55}}{9\cdot10^{46}} = \frac{10^9}{9} \simeq 10^8$ Солнц.

Такая точность для оценки вполне сойдет.

Ответ: на ЧД упало примерно 10^8 звезд солнечного типа.

Задача N2.

Сначала обсудим, за 2ч до какой кульминации Миру видел наблюдатель из Санкт-Петербурга. Высоты звезды в кульминациях $h_{вк} = 90^{\circ} - \varphi + \delta = 90^{\circ} - 60^{\circ} - 3^{\circ} = 27^{\circ}$,

$h_{нк} = -90^{\circ} + \varphi + \delta = -90^{\circ} + 60^{\circ} - 3^{\circ} = -33^{\circ} \approx -h_{вк}$. Т.к. звезда была, очевидно, видна, т.е. $h > 0$, то астроном видел ее явно перед верхней кульминацией. (Стоит отметить, что раз $|h_{вк}| \approx |h_{нк}|$, то в первом приближении звезда, являясь экваториальной, заходит за горизонт и восходит ~ ~~через~~ посередине между кульминациями, т.е. за/через 6 часов)

Здесь мы учли координаты Санкт-Петербурга: $\varphi = 60^{\circ}$; $\lambda = 30^{\circ}$.

Заметим, что разница звездного времени между СПб и Хатангой составляет $\Delta T = \frac{\Delta\lambda}{15} \approx \frac{72,5}{15} \approx 5$ часов, т.е. Мира Кита кульминировала

Шифр: Хим-3

Страница № 2

так $5^h - 2^h = 3^h$ назад. Но важно учесть, что ситуация с восходом и заходом звезды в Хатанге очень похожая, т.к. экваториальность Миры никто не отменял, а в Хатанге $h_{вк} = 15^\circ$, $h_{нк} = -21^\circ$.
Если считать движение звезды вдоль небесного меридиана (т.е. изм. высоты над горизонтом) ~~нос~~ равномерным между кульминациями, что мы для простоты (чтобы не лезть в сферическую тригонометрию) и сделаем, то путь между в.к. и заходом Мира Кита пройдёт за $\Delta t = 12^h \cdot \frac{15^\circ}{36^\circ} = \frac{5}{12} \cdot 12^h \approx 5^h$. Пока что прошло всего 3 часа с момента в.к., т.е. ещё ~2 часа (конечно не звёздных, но здесь фактор $\frac{24^h}{23^h 56^m}$ роли не играет) Мира Кита будет над горизонтом в Хатанге, и теоретически в течение получаса друг астронома вполне может найти её на небе!

<u>Ответ</u>: может, если, конечно, погода позволит :)

<u>Задача 3.</u>

В первом приближении можно положить, что обсерватория имела форму сферы (шара) с диаметром 14 м, т.е. радиуса $r = 7$ м.
Теперь надо бы осознать, почему „быстрое" вращение вокруг своей оси разрушило спутник? Скорее всего, во всем виноваты гравитационные силы. В самом деле, обычно именно они удерживают тела и части тел вместе.
Однако, если заставить спутник вращаться так, чтобы относительно него внешние „слои" крутились с хотя бы II космической скоростью, ~~эти~~ части оболочки не смогут удержаться вместе и разлетятся, разрушив спутник.

В данном контексте мы можем игнорировать притяжение других объектов, ибо в силу $2r \ll h_{сп} \lessdot R_⊕$ эти силы тяготения компенсируются в масштабах самой станции

Итак, в предельном случае мы должны посчитать (оценочно) период вращения обсерватории, при котором ~~...~~ её оболочка вращается с II космической скоростью. Пусть искомый период равен T, масса обсерватории M (центр тяжести, ~~что~~ как видно из рисунка, расположен в точке O)

Тогда, с одной стороны, $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$, а с другой же составляет $v_{II} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \frac{2GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow 2GMT^2 = 4\pi^2 r^3$

Отсюда $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{2GM}}$. Вспомним, что станция у нас примерно шарик $\Rightarrow M = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \approx 4r^3\rho$, откуда подстановкой $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{8G\rho}} \approx 3\sqrt{\frac{1}{2G\rho}} \approx 3\sqrt{\frac{1}{12\rho\cdot10^{-11}}} = \sqrt{\frac{9}{12\rho\cdot10^{-11}}}$

Теперь, наконец, ~~на~~ надо оценить плотность станции (среднюю) в $\frac{кг}{м^3}$ и получить ответ T в секундах. Скорее всего, обсерватория была сделана из каких-нибудь металлов, так что в общем $\rho \approx 10\,\frac{г}{см^3} = 10^4\,\frac{кг}{м^3}$. Тогда $T = \sqrt{\frac{9}{12\cdot10^4\cdot10^{-11}}} = \sqrt{\frac{9\cdot10^7}{12}} \approx 3\sqrt{\frac{10^7}{10}} = \underline{3000\,с}$

В итоге, оценочный период $T \approx$ ~~...~~ $\frac{5}{6}$ часа $= \underline{50 \text{ минут}}$

__Ответ:__ должно быть, $T \approx 50$ минут (если я все правильно понял и посчитал, а то какой-то неестественный ответ получился...)

Задача №4.

Для начала хорошо бы понять, чему равен орбитальный период Меркурия. Это можно сделать, применив III З. Кеплера:

$$\left(\frac{T_M}{T_\oplus}\right)^2 = \left(\frac{a_M}{a_\oplus}\right)^2 \Rightarrow T^2_{M,\,годы} = a^3_{M,\,а.е.} \Rightarrow T_M = a_M^{\frac{3}{2}}.$$

Помня, что $a_M \approx 0{,}4$ а.е., получается $T_M = \sqrt{0{,}064} = 0{,}8\cdot\sqrt{10} \approx \frac{1}{4}$ года $\Rightarrow T_{мл} = \frac{1}{60}T_M = \frac{1}{240}$ года. Учтя, что в году примерно $3\cdot10^7$ секунд, $T_{мл} = \frac{3\cdot10^7}{240} \approx \frac{1}{8}\cdot10^6 = 125\cdot10^3$ секунд.

Шифр: Хим-3
Страница № 4

Теперь посчитаем массу белого карлика M.
Ясно, что $M = V\rho$, где $V = \frac{4}{3}\pi R_⊕^3 \approx 4R_⊕^3$, ведь звезда имеет форму шара земного радиуса.
Тогда $M = 4R_⊕^3\rho = 4\cdot(6{,}3\cdot10^6)^3\cdot 9\cdot10^8 = 6^2\cdot6^3\cdot10^{26} = 6^5 10^{26}$ кг.
Запишем уравнение движения планеты вокруг звезды:
$GMT^2 = 4\pi^2 r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$ – радиус орбиты планеты
Посчитаем: $r \approx \sqrt[3]{\frac{6\cdot6^5\cdot10^{26}\cdot10^{-11}\cdot(5^3\cdot10^3)^2}{4\cdot9}} = \sqrt[3]{\frac{30^6\cdot10^{21}}{36}} = 9\cdot10^9\sqrt[3]{\frac{1}{36}} =$
$= \frac{9\cdot10^9}{\sqrt[3]{36}}$. С учетом $36 \approx 3{,}3^3$, получим $r \approx \frac{3\cdot10^9}{1{,}1} \approx 2{,}7\cdot10^9$ м
Т.е. $\underline{r \approx 2{,}7\cdot10^6 \text{ км}}$. Видно, что $r \gg R_⊕$.

Что было, когда звезда ~~[illegible]~~ была красным гигантом?
По условию, она имела массу $2M$, но предельно понятно, что и плотность её $\rho_з$ была совсем другой. Тогда её радиус R в те времена определяется из $2M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_з \approx 4R^3\rho_з$ или
$R = \sqrt[3]{\frac{M}{2\rho_з}}$, ~~Аналогично, будем~~ Как оценить плотность звезды?
Ясно, что за грубой оценкой можно взять плотность Солнца $\rho_⊙ \approx 1200\ \frac{кг}{м^3}$, Но Солнце – жёлтый карлик, и оно должно быть достаточно плотнее, чем рыхлые гиганты. Все же мы знаем, что к концу своей жизни Солнце превратится в красного гиганта, раздувшись до $\overset{\text{конц}}{\text{орбиты}}$ Земли. Посчитаем его плотность $\underline{\text{тогда}}$ и примем её за $\rho_з \approx \frac{M_⊙}{4a_⊕^3} = \frac{2\cdot10^{30}}{4\cdot(\frac{150}{2}\cdot10^9)^3} = \frac{2}{15^3}\ \frac{кг}{м^3}$
Тогда $R = \sqrt{\frac{6^5\cdot10^{26}\cdot15^3}{4}} \approx 15\cdot10^8\sqrt[3]{600} \approx 10^{10}$ м $= 10^7$ км $\approx r$, т.е.
с точностью до порядка звезда может достичь орбиты экзопланеты. Однако же если $\rho_з > \rho_⊙$, новая, то $R \ll r$. $\boxed{R \sim r}$
Так, при $\rho_з = \rho_⊙ \approx 1200\ \frac{кг}{м^3}$ $\left(\rho_⊙ = \frac{M_⊙}{4R_⊙^3} = \frac{2\cdot10^{30}}{4\cdot(7\cdot10^8)^3} \approx \frac{10^6}{800} = \frac{10^4}{8} \approx 1200\ \frac{кг}{м^3}\right)$
$R = \sqrt[3]{\frac{6^5\cdot10^{26}}{2400}} = \sqrt[3]{\frac{6^4\cdot10^{24}}{4}} \approx 6\cdot10^8$ м $= 6\cdot10^5$ км $\ll 2{,}7\cdot10^6$ км $= r$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по идее, планета могла там находиться, но скорее всего,

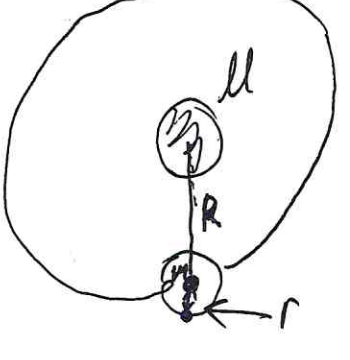
Шифр: Хим-3
Страница № 5

даже при нескратном различии между R и r излучение и корональные выбросы массы очень быстро сожгли бы ~~эту~~ планету. Ведь даже Меркурий, находясь на расстоянии $a_M = 0{,}4$ а.е. $= 60 \cdot 10^6$ км, имеет „фактор удаленности" от Солнца $\frac{a_M}{R_\odot} = \frac{60 \cdot 10^6 км}{7 \cdot 10^5 км} = \frac{600}{7} \approx 85$ раз, что, очевидно, много больше даже самого оптимистичного прогноза для этой экзопланеты. ($85 \gg 5$). В итоге, я считаю, что планеты там быть в то время не могло, иначе просто она была бы уничтожена красным гигантом.

<u>Ответ</u>: не могла существовать на этой орбите.

Задача N5.

Сперва для наглядности нарисуем картинку:



В этой задаче очень удобно провести аналогию с системой Солнце – Земля – Луна. Действительно, нас как бы просят посчитать период смены фаз Луны для наблюдателя на Земле через параметры Солнца и Земли, т.е. её синодический месяц. В самом деле, период ~~смены фаз~~ повторения фаз есть период, за который фазовые углы планеты (спутника) ~~становятся снова~~ ~~рав~~ повторяются. Это есть период повторения конфигураций относительно Солнца, который астрономы называют синодическим периодом S и который вычисляется как $\frac{1}{S} = \left|\frac{1}{T} - \frac{1}{t}\right| \Leftrightarrow S = \frac{Tt}{|T-t|}$, где T и t – сидерические периоды вращения планет (в нашем случае, ~~Земли и спу~~ планеты и спутника, соответственно)

Шифр: Хим-3

Страница № 6

Таким образом, для вычисления S нам надо знать T планеты вокруг звезды и t спутника вокруг планеты. Эти величины легко вычисляются из уравнений орбит $GM\tau^2 = 4\pi^2 a^3$, где τ - период обращения, a — радиус орбиты, а M - масса центрального тела. Это соотношение с лёгкостью ~~перед~~ переходит в III обобщенный закон Кеплера при сравнении с Землей: $\frac{M}{M_З}\left(\frac{\tau}{\tau_З}\right)^2 = \left(\frac{a}{a_З}\right)^3$. Тогда $\tau = \tau_З\sqrt{\frac{M_З}{M}\left(\frac{a}{a_З}\right)^3}$.

Период планеты T вычисляется из сравнения с системой Солнце — Земля: $T = T_⊕\sqrt{\frac{M_☉}{4M_☉}\left(\frac{4a_⊕}{a_⊕}\right)^3} = 4T_⊕ =$ 4 года (с учетом $4ае. = 4a_⊕$). Аналогично, t вычисляется из сравнения с системой Земля — Луна:

$$t = t_Л\sqrt{\frac{6\cdot10^{24}}{3\cdot10^{24}}\left(\frac{400\text{ тыс. км}}{388\text{ тыс. км}}\right)^3} \approx 1{,}5\,t_Л = 1{,}5\cdot27{,}3\text{ сут} \approx 31\text{ сут.}$$

Также $T = 4T_⊕ \approx 4\cdot365{,}25\text{ сут} = 1461\text{ сут.}$

Итак, теперь можно наконец посчитать и сам синодический период $S = \frac{Tt}{T-t} = \frac{1461\cdot31}{1461-31} = \frac{45291}{1430} \approx 31{,}7$ сут

Ответ довольно логичный, ведь большая длительность планетарного года свидетельствует о незначительном повороте планеты вокруг ~~солнца~~ её звезды за один „спутниковый месяц", который почти равен лунному сидерическому ⇒ происходит задержка фазы всего на ≈0,7 сут / „лунный" месяц. Разумеется, мы не учли суточного вращения самой планеты с наблюдателем, но оно на оценку и не влияет.

Ответ: период повторения фаз спутника составляет ~31,7 суток.