№ 1

$\omega_c = \omega_\oplus$ – геостационарный спутник

$\frac{\Delta v_1}{v_0} = 10\%$ $\quad |T_I - T_{II}| - ?$

$\frac{\Delta v_2}{v_1} = 10\%$

~~(I) Если бы всё пошло так:~~ Изначально:

$\omega_c = \frac{v_c}{R}$ ← орб. скорость спутника

радиус орбиты

$v_c \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R^3}}$

(*): По ф-ле первой космической на расст. R

$M_\oplus$ – Масса Земли, $M_\oplus = 6 \cdot 10^{24}$ кг

$\omega_c = \omega_\oplus = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}$

$R = \sqrt[3]{\frac{GM_\oplus}{\omega_\oplus^2}} \Rightarrow$

$v_c = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{\sqrt[3]{GM_\oplus}} \cdot \sqrt[3]{\omega_\oplus}^2} = \sqrt[3]{\omega_\oplus} \cdot \sqrt[3]{GM_\oplus}$

$v_c = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{24 \cdot 3600}} = 10^4 \sqrt[3]{\frac{2\pi \cdot 6{,}67}{24 \cdot 360} \cdot 6} =$

$= 10^4 \cdot \sqrt[3]{\frac{3{,}14 \cdot 6{,}67}{12 \cdot 60}} \simeq \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot \sqrt[3]{\frac{20{,}94}{3 \cdot 30}} \approx \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot \sqrt[3]{\frac{7}{30}} \approx \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot \frac{1{,}9}{3{,}1} \approx$

$\approx 0{,}3 \cdot 10^4$ (м/с) $= 3$ км/с; $\boxed{v_c = 3 \text{ км/с}}$

$\Delta v_1 = 0{,}3$ км/с ; $\boxed{R =} \frac{v_c}{\omega_\oplus} = \frac{30\,000}{2\pi} \cdot 24 \cdot 3600$ (м) $\approx \boxed{41{,}5 \cdot 10^3 \text{ км}}$

I) Если бы всё пошло так:

• После добавки скорости спутник будет в перицентре своей орбиты $\Rightarrow v_n = v_c + \Delta v_1$. По ф-ле перицентр. скорости:

$v_n = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{q} \cdot 1+e}$ ← эксцентриситет

перигейное расст.

$q = R$; $v_n = 3{,}3 \cdot 10^3$ м/с

• Найдём эксцентриситет:

$e_1 = \frac{v_n^2 q}{GM_\oplus} - 1$, ~~$v_n \neq v_c \neq \sqrt{GM}$~~

продолж. см на обороте

№1 (продолж.)

$$e_1 = \frac{(3,3)^2\cdot 10^6 \cdot 41,5\cdot 10^6}{6,67\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot 10^{-11}} - 1 = \frac{1}{10}\cdot\frac{10,89\cdot 41,5}{6\cdot 6,67} - 1 \approx \frac{11,3}{10} - 1 = 0,13$$

$\boxed{e_1 = 0,13}$; через полпериода он окажется в апоцентре орбиты:

Апоцентр ~~фокальное~~ расстояние: $Q = q\cdot\frac{1+e}{1-e} = 41,5\cdot\frac{1,13}{0,87} \approx 41,5\cdot 1,3 \approx$

$\approx 54\cdot\cancel{10}$ (тыс. км.)

Скорость в апоцентре: $v_a = v_n\cdot\frac{1-e}{1+e} = \frac{3,3}{1,3}$ км/с $\approx 2,54$ км/с

$\Delta v_2 = v_a\cdot 0,1 = 0,25$

$v_{a2} = v_a - \Delta v_a = 2,3$ км/с — аппарат снова в апоцентре после ~~добавлен~~ уменьшения скорости

Скорость в апоцентре:

$$v_a = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a}\cdot\frac{1-e_2}{1+e_2}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{Q}\cdot 1-e_2}$$

$$e_2 = 1 - \frac{v_a^2 Q}{GM_\oplus}$$

$$e_2 = 1 - \frac{(2,3)^2\cdot 10^6\cdot 54\cdot 10^6}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{54}{6}\cdot\frac{(2,3)^2}{6,67} = \frac{9}{10}\cdot\frac{5,29}{6,67} \approx$$

$\approx 1 - 0,9\cdot 0,79 \approx 1 - 0,72 \approx 0,18$

$\boxed{e_2 \approx 0,18}$

$a_I = \frac{Q}{1+e_2}$ — большая полуось конечная орб. в I сл.

$$a_I = \frac{54}{1,18} = 45,6 \text{ (тыс. км.)}$$

II) Если пошло не так:

Спутник окажется в апоцентре

$v_a = v_c - \Delta v_1 = 2,7$ км/с

$Q = R = 41,5\cdot 10^3$ км

$$e_1 = 1 - \frac{v_a^2 Q}{GM_\oplus} = 1 - \frac{(2,7)^2\cdot 10^6\cdot 41,5\cdot 10^6}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}} = 1 - \frac{1}{10}\cdot\frac{7,29\cdot 41,5}{6\cdot 6,67} \approx$$

$\approx 1 - 0,76 = 0,24$

См. лист 2

$q = a\,\dfrac{1-e}{1+e}$ – 1/3 полпериода он окажется в перицентре

$q = 41{,}5 \cdot \dfrac{0{,}76}{1{,}24}$ (тыс. км) $\approx$ 25,3 тыс. км.

$v_п = v_a \cdot \dfrac{1+e}{1-e} = \dfrac{2{,}7}{0{,}61} \approx 4{,}43$ км/с

$\Delta v_2 = 0{,}44$ км/с

$v_{п1} = v_п + \Delta v_2 = 4{,}87$ км/с – после добавл. скорости он снова в перицентре

$$e_2 = \frac{v_{п1}^2\, q}{GM_\oplus} - 1 = \frac{(4{,}87)^2 \cdot 10^6 \cdot 25{,}3 \cdot 10^6}{6 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{13}} - 1 = \frac{1}{10} \cdot \frac{23{,}7 \cdot 25{,}3}{6 \cdot 6{,}67} - 1 \approx$$

$$\approx \frac{1}{10} \cdot \frac{599{,}6}{6 \cdot 6{,}67} - 1 \approx \frac{10}{6{,}67} - 1 \approx 0{,}5$$

$$\boxed{e_2 \approx 0{,}5}$$

$$\boxed{a_{II} = \frac{q}{1-e} = 2q = 50{,}6 \text{ тыс. км}}$$

III) Разность периодов.

По III з-ну Кеплера:

$\dfrac{T^2}{T_0^2} = \dfrac{a^3}{a_0^3}$. Сравниваем с геостацы. орбитой: $T_0 = 24 \cdot 3600$ с;

периоды

$a_0 = R \approx 41500$ км

$$T_I = T_0 \cdot \left(\frac{a_I}{a_0}\right)^{3/2}$$

$$T_{II} = T_0 \cdot \left(\frac{a_{II}}{a_0}\right)^{3/2}$$

$$T_I - T_{II} = T_0 \cdot \frac{a_I^{3/2} - a_{II}^{3/2}}{a_0^{3/2}} = T_0\left(\left(\frac{a_I}{a_0}\right)^{3/2} - \left(\frac{a_{II}}{a_0}\right)^{3/2}\right)$$

$$\Delta T = |T_I - T_{II}| \approx \left|24^h \cdot \left((1{,}1)^{3/2} - (1{,}2)^{3/2}\right)\right| = \left|24^h \underbrace{\left(\left(\sqrt{1{,}1} - \sqrt{1{,}2}\right)\left(1{,}1 + 1{,}2 + \sqrt{1{,}1 \cdot 1{,}2}\right)\right)}_{\text{раз-ть кубов}}\right|$$

$\sqrt{1{,}1} \approx 1{,}05$

$\sqrt{1{,}2} \approx 1{,}1$

$$\Delta T \approx 24^h \cdot (1{,}1 - 1{,}05) \cdot (2{,}3 + 1{,}1 \cdot 1{,}05) = 24 \cdot 3{,}455 \cdot 0{,}05^h = 4{,}15^h \approx 4^h 9^m$$

Ответ: $4^h 9^m$.

№2

$\varphi = 28°$; $\alpha = 6^h45^m$; $\delta = -17°$

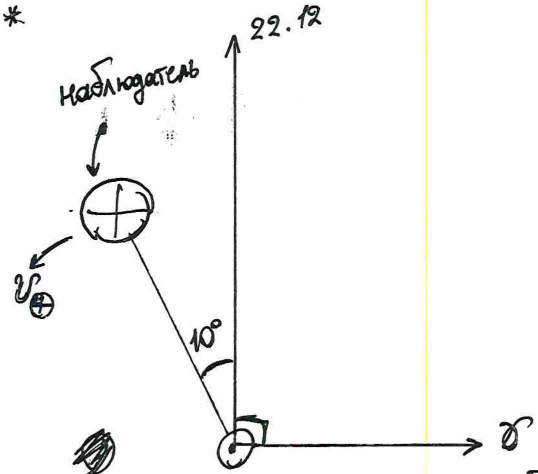
$v = 1$ м/с; $t = 30$ с

$\Delta m - ?$

• Т.к. дело происх. в новогоднюю полночь, то наблюдатель смотрит ~~находится~~ на противоположную Солнцу сторону неба. Новый год отстоит от т. осеннего равноденствия на ≈100°: 90° до 22 дек. и 10° до 1 янв.

$\alpha = 6^h45^m \approx 90° + \left(\frac{45}{4}\right)° \approx 100° \Rightarrow$ Сириус сейчас в верхн. кульминации

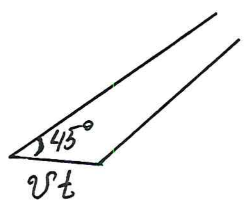
ну не прямо сейчас, а когда случилось описан. в задаче



• Высота Сириуса над горизонтом: $\boxed{h_в = 90° - |\varphi-\delta| = 45°}$

• За 30 с они прошли: $v\cdot t = 30$ м, что мало на фоне 6400 км $= R_\oplus \Rightarrow$ можно считать, что они шли по прямой $\Rightarrow$ расст. до Сириуса уменьшилось на

$vt\cdot\cos(45°) = 30\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ м ≈ 21 м



$\boxed{\Delta r = 21 \text{ м}}$

~~Вращ~~ Скорость вращ Земли в этот момент ⊥ напр. на Сириус ⇒ она не влияет на Δr.

По ф-ле Погсона:

$$\Delta m = 2{,}5\lg\frac{E_1}{E_2} = 2{,}5\lg\left(\left(\frac{a-\Delta r}{a}\right)^2\right) = 2{,}5\lg\left(\left(1-\frac{\Delta r}{a}\right)^2\right) \approx 2{,}5\lg\left(1-\frac{2\Delta r}{a}\right) \Rightarrow$$

$\boxed{\Delta m \approx \frac{5\Delta r}{a}}$; a – расст. до Сириуса; E_i – освещённость

продолж. см. на обороте

№2 (продолж.)

расст. до Сириуса я не знаю, но ~~я~~ могу предположить, что

$a \approx 0,5$ пк. $\Rightarrow$

$$\Delta m = \frac{5 \cdot 21\,м}{0,5 \cdot 206265 \cdot 150 \cdot 10^9\,м} \,(m) = \frac{21}{20,6 \cdot 150 \cdot 10^{12}}\,m \approx \frac{1}{150} \cdot 10^{-12}\,m \approx 0,6 \cdot 10^{-14}\,m$$

Ответ: $0,6 \cdot 10^{-14}$ m.

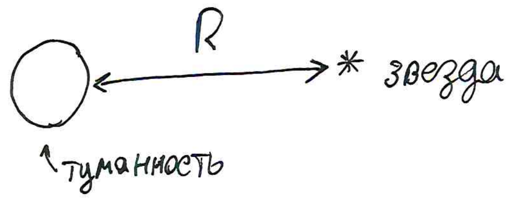
№4

$m = 5{,}7^m$

$r = 0{,}31\cdot 10^3$ пк

$M_* = -2{,}5^m$

$R - ?$



• Найдём L_*:

По ф-ле Погсона:

$M_* - M_\odot = 2{,}5 \lg \frac{E_\odot}{E_*}$ – сравн. с Солнцем.

$E_* = \frac{L_*}{4\pi r^2}$ ← светимость

$E_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}$ ↖ $a_\oplus = 1$ а.е. – радиус орбиты Земли

$$\frac{E_\odot}{E_*} = \frac{L_\odot}{L_*}\cdot\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^{-2}$$

$\frac{L_*}{L_\odot}\cdot\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^2 = 10^{0,4(M_\odot - M_*)}$, $M_\odot = 4{,}8^m$ – абс. звездная вел. Солнца

↖1, т.к. M мер. с 10 пк

$L_* = L_\odot \cdot \cancel{\left(\frac{r}{a_\oplus}\right)^2}\cdot 10^{0,4\cdot(4,8+2,5)} = L_\odot\cdot \cancel{\left(\frac{0,31\cdot 206265\cdot 10^3}{1}\right)^2}\cdot 10^{0,4\cdot 7,3} \approx$

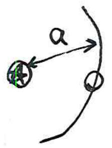
$\approx \cancel{10^{13,9} L_\odot}\ 10^{2,9} L_\odot$

№ 3

Звезда ГП, $M = 2M_\odot$, $T = 4$ года, $T_{пл} = 20$ч, $S = 100$ м^2, $\eta = 10\%$

E_Σ - ?

• По III з-ну Кеплера:



$$\frac{T^2}{T_\oplus^2} \cdot \frac{M}{M_\odot} = \frac{a^3}{a_\oplus^3}$$, где $T_\oplus = 1$ год - орб. период Земли;
$a_\oplus = 1$ а.е. - радиус орбиты $\oplus$;
a - радиус орбиты планеты

$$a = 1 \text{а.е.} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot (4)^{2/3} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[3]{4} \approx 2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2 \text{(а.е.)}$$

$$\boxed{a = 3{,}2 \text{ а.е.}}$$

• Т.к. звезда - ГП, то для неё справедливо:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4$$

$$\boxed{L = 2^4 L_\odot = 16 L_\odot}$$

• Найдём освещённость от звезды на орбите планеты:

$\alpha = \frac{L}{4\pi a^2}$; сравним с $\alpha_\odot = 1360 \frac{Вт}{м^2}$:

$$\frac{\alpha}{\alpha_\odot} = \frac{L}{L_\odot} \cdot \left(\frac{a_\oplus}{a}\right)^2 = 16 \cdot \cancel{2^{4/3}} \cdot (3{,}2)^{-2} = \frac{160}{32 \cdot 3{,}2} = \frac{50}{32} =$$

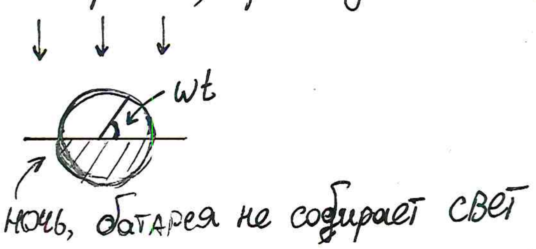
$= 1{,}5625$

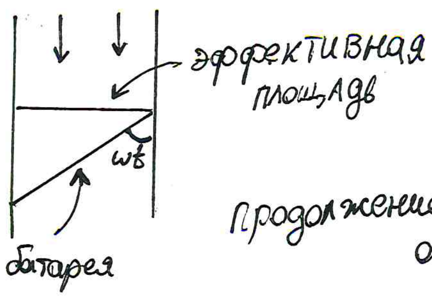
$$\alpha = 1360 \cdot \frac{25}{16} = 2125 \left(\frac{Вт}{м^2}\right)$$

$$\boxed{\alpha = 2125 \frac{Вт}{м^2}}$$

• Батарея будет поворачиваться с $\omega = \frac{2\pi}{20 \cdot 3600}$ рад/с.

При этом её эфф. площадь пропорциональна $\sin(\omega t)$, где t - время, прошедшее с рассвета в точке обсерватории.





Продолжение см. на обороте

№3 (продолж.)

За время dt собранная энергия dE:

$$dE = S\sin(\omega t) \cdot \alpha \cdot \eta \cdot dt$$

$$E_\Sigma = \int_0^{10ч} S\alpha\eta \sin(\omega t)\, dt = -\frac{S\alpha}{\omega}\left(\cos(\omega \cdot 10ч) - \cos(\omega \cdot 0ч)\right)\eta$$

За 10 ч. батарея пройдёт всю освещённую половину планеты, а потом перестанет собирать энергию, т.к. наступит ночь.

$$E_\Sigma = \eta \frac{S\alpha}{\omega}\left(\cos(0) - \cos(\pi)\right) = \frac{2S\alpha}{\omega}\eta$$

$$E_\Sigma = \frac{2 \cdot 100 \cdot 2125}{2\pi} \cdot 3600 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = \frac{153 \cdot 10^7}{\pi} \approx \frac{1{,}53}{2 \cdot 1{,}57} \cdot 10^9 \approx$$

$$\approx 0{,}5 \cdot 10^9 \text{ (Дж)}$$

$$\boxed{E_\Sigma = 500 \text{ МДж}}$$

Ответ: 500 МДж.