

XXVIII Санкт-Петербургска
олимпиада на астрономия
Теоретичен тип
31. I. 2021г.

Задача 1.

Енергията, която се отделя при това
избухване, е $E = 10^{55}$ J.

Енергията в покой на акретиращата
маса M е $E_0 = Mc^2$, където
 $c = 3 \cdot 10^5$ km/s $= 3 \cdot 10^8$ m/s.

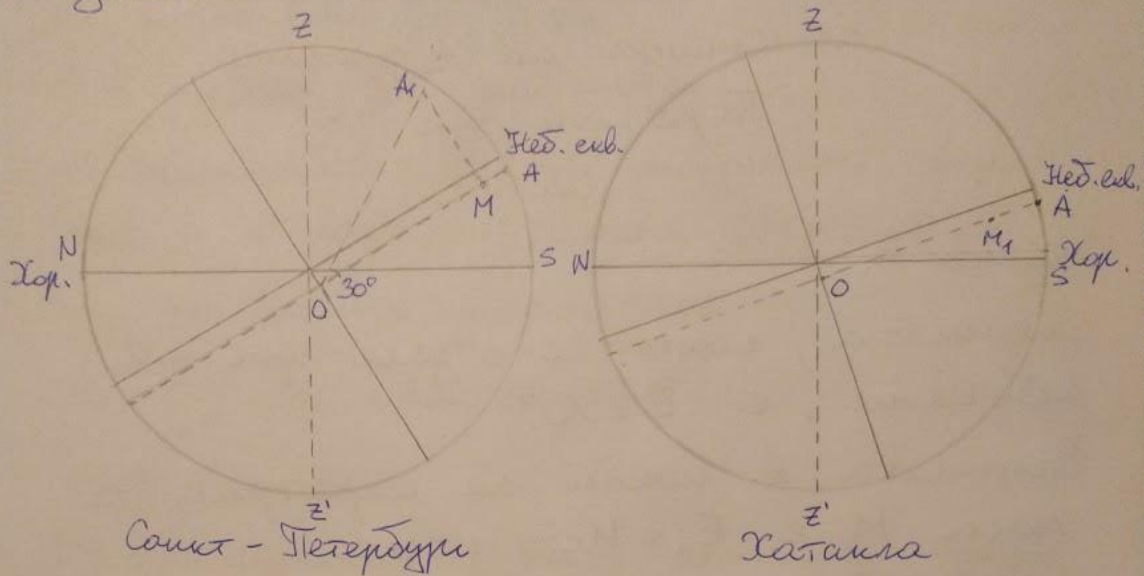
$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} E_0 = \frac{1}{2} Mc^2$$

$$\Rightarrow M = \frac{2E}{c^2} = \frac{2 \cdot 10^{55} \text{ J}}{9 \cdot 10^{16} (\text{m/s})^2} = \frac{2}{9} \cdot 10^{39} \text{ kg}$$

Тко отделената енергия се губи
единствено на магнали звезди, подобни
на Слънцето, масата на Слънцето е
 $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

$$\Rightarrow \text{Броят звезди } N \text{ е } N = \frac{M}{M_\odot} = \frac{2 \cdot 10^{39}}{2 \cdot 10^{30}} \\ = \frac{10^9}{1} \approx 10^8$$

Задача 2.



Височината на Мира над хоризонта в Санкт-Петербург е (в горна кулиминация) е $h_{СП} = 90^\circ - \varphi_{СП} - |\delta| = 90^\circ - 60^\circ - 3^\circ = 27^\circ$, а в Казан е $h_x = 90^\circ - \varphi_x - |\delta| = 90^\circ - 72^\circ - 3^\circ = 15^\circ$.

Казан се намира на изток от Санкт-Петербург с $\frac{102,5^\circ - 30^\circ}{360^\circ} \cdot 24^h = 4,5^h$.

\Rightarrow Когато за Санкт-Петербург звездата се намира 2^h преди горна кулиминация, в Казан се намира на $2,5^h$ след горна кулиминация на небесната сфера, а малък час по-късно - на 3^h след горна кулиминация. Тъй като δ е много малък ъгъл, то $\cos|\delta| \approx 1$ (приемаме радиуса на неб. сфера за 1).

2^h преди горна кулминация звездата се намира на юг

$$\theta = \frac{2}{24} \cdot 360^\circ = 30^\circ \text{ на изток.}$$

\Rightarrow Проекцията ѝ върху небесната сфера ще е в точка M , като $OM = \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

За да хатамиз имаме юг

$$\theta_1 = \frac{2,5}{24} \cdot 360^\circ = 2,5 \cdot 15^\circ = 37,5^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \cos 37,5^\circ$$

\Rightarrow Проекцията ѝ върху небесната сфера ще е в точка M_1 , като $OM_1 = \cos \theta_1$

$$\approx 1 - \frac{\theta_1^2}{2} \approx 1 - 0,21 \approx 0,79, \text{ когато } \theta_1 \text{ е в радиани.}$$

\Rightarrow След още 30 min, звездата ще може да се наблюдава от Хатамиз.

\Rightarrow Отговор: да

Задача 3.

При въртене на ~~се~~ обсерваторията
около оста си, разстоянието ~~от~~ до
оста на въртене на периферията на
обсерваторията е $r = \frac{l}{2} = 7\text{m}$

~~\Rightarrow В неинерциалната отиравна система
на обсерваторията, центроостремителното
уско~~

Центроостремителното ускорение на
частиче с ~~м~~ маса m в край на
обсерваторията е $a = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{l}{2} = \frac{2\pi^2 l}{T^2}$.

Гравитационното ускорение на тази
поверхността частиче е $g = \frac{GM}{r^2} = \frac{4GM}{l^2}$.

Станцията ще се разруши, когато
силите в неинерциалната отиравна
система се уравновесят.

$$\Rightarrow mg = ma$$

$$\frac{2\pi^2 l}{T^2} = \frac{4GM}{l^2}$$

$$T^2 = \frac{2\pi^2 l^3}{4GM}$$

\Rightarrow периодът е $T = \sqrt{\frac{\pi^2 l^3}{2GM}} \approx 1,4 \cdot 10^4 \text{ s}$
при маса на обсерваторията $M \approx 10^5 \text{ kg}$.

Задача 4.

Радиусът на орбитата на Меркурий е
 $r_{\text{M}} = 0,4 \text{ AU} = 0,4 \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 60 \cdot 10^7 \text{ km} = 6 \cdot 10^{10} \text{ m}$

От III закон на Кеплер:

$$\frac{r_{\text{M}}^3}{T_{\text{M}}^2} = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2} \quad \frac{r_{\text{M}}^3}{T_{\text{M}}^2} = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2}$$

Радиусът на бялото гъсунце е $R = 6 \cdot 10^3 \text{ km}$
 $= 6 \cdot 10^6 \text{ m}$. Йеробата маса е

$$M = \rho V = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^8 \cdot 216 \cdot 10^{18} \text{ kg} \approx 8,14 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

\Rightarrow ако радиусът на орбитата на
Бялото гъсунце е r , а периодът му
е $T = \frac{1}{60} T_{\text{M}}$, от III закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{r_{\text{M}}}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_{\text{M}}}{T}\right)^2 = \frac{M}{M_{\odot}}$$

$$\left(\frac{r}{r_{\text{M}}}\right)^3 \cdot 60^2 = \frac{8,14 \cdot 10^{29}}{2 \cdot 10^{30}}$$

$$\frac{r^3}{216 \cdot 10^{30}} \cdot 60^2 = \frac{8,14 \cdot 10^{29}}{2 \cdot 10^{30}}$$

$$\frac{50}{3} r^3 = 4,07 \cdot 10^{29}$$

$$r^3 = 2,442 \cdot 10^{29}$$

$$\Rightarrow r \approx 1,4 \cdot 10^9 \text{ km} \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Три 2 пъти по-голяма маса на
члвквннн млнт. средната му плътност

ще бъде по-малка, отколкото на бялото
гигант. ~~и както~~

=> Радиусът на червените гиганти ще
бъде в пъти по-голям от радиуса на
бялото гигант и дори от радиуса на
орбитата на планетата.

=> Планетата не е съществувала, когато
звездата е била червен гигант.

Задача 5.

Масата на звездата в планетната система е $M_* = 4 \text{ sm} = 4 M_\odot$.

~~Периодът~~ и е Периодът на планетата е $T_p = 4 \text{ yr} = 4 T_\oplus$.

\Rightarrow От III закон на Кеплер имаме:

$$\frac{a_p^3 [\text{AU}]}{T_p^2 [\text{yr}]} = M_* [\text{sm}] \Rightarrow a_p = 4 \text{ AU}$$

Масата на планетата е $M_p = 3 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, а масата на Земята е $M_\oplus = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

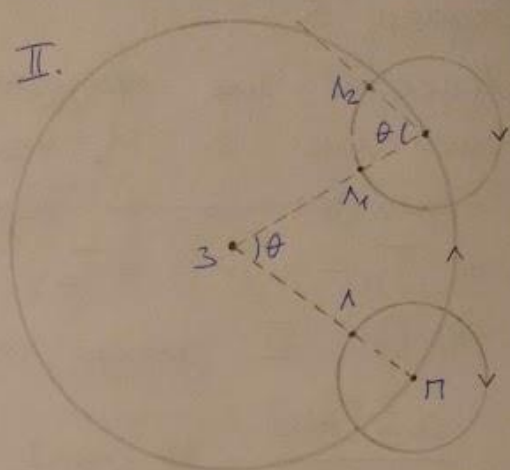
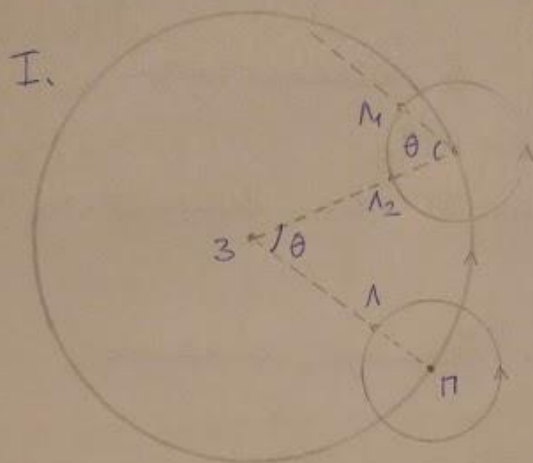
За сателитна имаме $a_\lambda = 4 \cdot 10^5 \text{ km}$, а за Луната $a_\oplus = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$, $T_\oplus = 27,3 \text{ d}$.

$$\frac{a_\lambda^3}{T_\lambda^2} = \frac{GM_p}{4\pi^2}, \quad \frac{a_\oplus^3}{T_\oplus^2} = \frac{GM_\oplus}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_\lambda/a_\oplus)^3}{(T_\lambda/T_\oplus)^2} = \frac{M_p}{M_\oplus} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_\lambda}{T_\oplus}\right)^2 = 2 \left(\frac{a_\lambda}{a_\oplus}\right)^3 \approx 2,24$$

$$T_\lambda \approx 1,5 \cdot T_\oplus = 1,5 \cdot 27,3 \text{ d} = 40,95 \text{ d}$$



Сеза трябва да се разгледаме 2 случая:
ако планетата и спътника обикалят в
еднаква посока и ако обикалят в
различни посоки.

I. Ако обикалят в еднаква посока, от
формулата за синодитен период имаме:

$$\frac{1}{S_I} = \frac{1}{T_\Lambda} - \frac{1}{T_\Pi} \Rightarrow S_I = \frac{T_\Pi T_\Lambda}{T_\Pi - T_\Lambda} = \frac{4 \cdot 365 \cdot 40,95}{4 \cdot 365 - 40,95} d$$

$$S_I = 42,13 d$$

II. Ако обикалят в различни посоки,
имаме:

$$\frac{\theta}{360^\circ \pm \theta} = \frac{T_\Lambda}{T_\Pi} \Rightarrow \mp \theta \cdot T_\Pi = 360^\circ \cdot T_\Lambda \mp \theta T_\Lambda$$

$$\theta = 360^\circ \cdot \frac{T_\Lambda}{T_\Pi + T_\Lambda} \Rightarrow S_{II} = \frac{T_\Pi T_\Lambda}{T_\Pi + T_\Lambda} = \frac{4 \cdot 365 \cdot 40,95}{4 \cdot 365 + 40,95} d$$

$$S_{II} = 38,83 d$$

Чепурба

Задача 1.

$$E = 10^{55} \text{ J}$$

$$E_0 = Mc^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} E_0 = \frac{1}{2} Mc^2$$

$$c = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

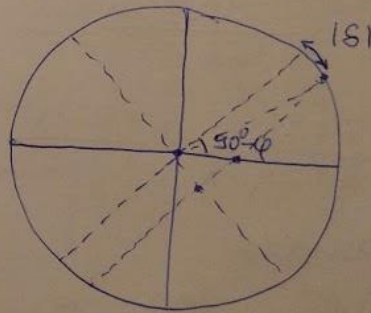
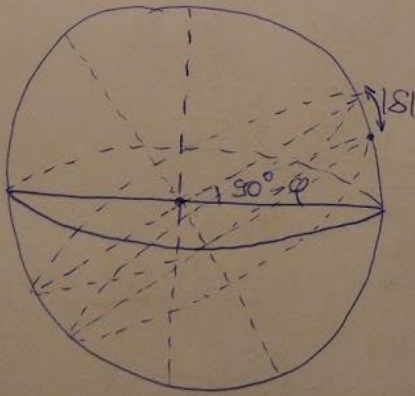
$$\Rightarrow M = \frac{2E}{c^2} = \frac{2 \cdot 10^{55}}{9 \cdot 10^{16}} = \frac{2}{9} \cdot 10^{39} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow N = \frac{M}{M_0} = \frac{2 \cdot 10^{39}}{9 \cdot 7 \cdot 10^{30}} = \frac{10^9}{9} \approx 10^8 \text{ звёзд}$$

$$10^9 = \frac{1000000000}{9} = 1$$

Задача 2.

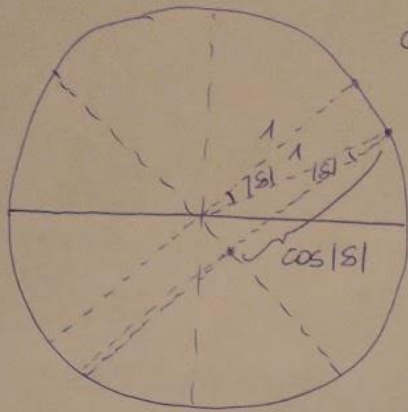
$$\delta = -3^\circ$$



$$\theta = \frac{2}{24} \cdot 360^\circ = \frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





$$\cos |\delta| \approx 1 + \frac{|\delta|^2}{2}$$

3. a) 4.

$$T_M = 88 \text{ d} \Rightarrow T_w = \frac{88}{60} \text{ d} = \frac{22}{15} \text{ d}$$

$$\rho = 9 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^3$$

$$R = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M = \rho V = 9 \cdot 10^8 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 \cdot 10^{18} \text{ kg} \approx 8,14 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

$$\begin{array}{r} 36.6 \\ 216 \\ \hline 12.216 \\ 432 \\ \hline 216 \\ \hline 2592 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2592 \cdot 3,14 \\ \hline 10368 \\ 2592 \\ \hline 7776 \\ \hline 813888 \end{array}$$

$$\frac{135 \cdot 135}{60}$$

$$\frac{4 \cdot 15}{60}$$

$$\begin{array}{r} 13.13 \\ 39 \\ \hline 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 169 \cdot 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\frac{3600 \cdot 816}{6^3} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$$

$$\frac{6^2 \cdot 10^2}{6^3} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$$

$$\begin{array}{r} 14.14 \\ 56 \\ \hline 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,25 \cdot 1,5 \\ \hline 1125 \\ 225 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,6 \cdot 4,07 \\ \hline 2442 \end{array}$$

$$1,2 \cdot 1,2 = 1,44$$

$$14 \cdot 14 = 196$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ 225 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2442 \mid 2 \\ 1221 \mid 3 \\ 407 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \cdot 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 1,26 \cdot 14 \\ \hline 784 \\ 196 \\ \hline 2744 \end{array}$$

Мернова

$$\begin{array}{r} 22 \\ 4.365 \end{array} \begin{array}{l} 12 \\ 45 \\ 23 \\ \hline 1460,40,95 \\ \hline 7300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13140 \\ 58400 \\ \hline 5978700 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 1460,00 \\ 40,95 \\ \hline 1419,05 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1460,00 \\ + 40,95 \\ \hline 1500,95 \end{array}$$

$$59787 : 1419,05 =$$

$$\begin{array}{r} - 5978700 : 141905 = 42,13 \\ \hline 567620 \end{array}$$

$$59787 : 1500,95 =$$

$$\begin{array}{r} - 302500 \\ - 283810 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 186900 \\ - 141905 \end{array}$$

$$\frac{\theta}{T_{\Pi}} = \frac{360^{\circ} - \theta}{T_{\Lambda}}$$

$$\theta T_{\Pi} = (360^{\circ} - \theta) T_{\Lambda}$$

$$360^{\circ} \cdot T_{\Lambda}$$

$$\frac{T_{\Lambda}}{T_{\Pi}} = \frac{360^{\circ} - \theta}{\theta}$$

$$\begin{array}{r} - 5978700 : 150095 = 39,83 \\ \hline 450285 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1475850 \\ - 1350855 \\ \hline 1249950 \\ - 1200760 \\ \hline 491900 \end{array}$$

$$\theta T_{\Lambda} = 360^{\circ} \cdot T_{\Pi} - \theta T_{\Pi}$$

$$\theta (T_{\Lambda} + T_{\Pi}) = 360^{\circ} \cdot T_{\Pi}$$

$$\theta = \frac{T_{\Pi}}{T_{\Lambda} + T_{\Pi}} \cdot 360^{\circ}$$

$$S = T_{\Lambda} (360^{\circ} - \theta) =$$

$$\frac{\theta}{360^{\circ} + \theta} = \frac{T_{\Lambda}}{T_{\Pi}}$$

$$\theta T_{\Pi} = 360^{\circ} T_{\Lambda} + \theta T_{\Lambda}$$

$$\theta (T_{\Pi} - T_{\Lambda}) = 360^{\circ} T_{\Lambda}$$

Чепуба
Задача 5.

$$M = 4 \text{ sm}$$

$$T = 4 \text{ yr}$$

$$\Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = M$$

$$r^3 = MT^2 \Rightarrow r = 4 \text{ AU}$$

$$r_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ km} = 4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \text{ m} = 4 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$M_{\text{JP}} = 3 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_{\oplus} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\oplus}}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{27,3} - \frac{1}{365}$$

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{T_{\oplus}^2}{r_{\oplus}^3} = \frac{M_{\text{JP}}}{M_{\oplus}}$$

$$2,24$$

$$15,273$$

$$27,3 \cdot 365$$

$$1095$$

$$+ 2555$$

$$730$$

$$99645$$

~~$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = M$$~~

$$1,5$$

$$1365$$

$$273$$

$$4095$$

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{GM_1}{4\pi^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}$$

$$= \frac{365,0}{27,3}$$

$$= \frac{337,7}{32105}$$

~~$$r_1 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^{24}$$~~

$$99645 : 337,7 = 29$$

$$6754$$

$$32105$$

~~$$\left(\frac{r_1}{r_{\oplus}}\right)^3 = \frac{M_1}{M_{\oplus}}$$~~

$$\left(\frac{r_1}{r_{\oplus}}\right)^3 = \left(\frac{T_{\oplus}}{T_1}\right)^2 \cdot \frac{M_{\text{JP}}}{M_{\oplus}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{T_1}{T_{\oplus}}\right)^2$$

$$400 : 384 = 1,04$$

~~$$384$$~~

$$1600$$

$$-1536$$

$$64$$

$$1,04 \cdot 1,04$$

$$416$$

$$1040$$

$$10816$$

$$1,0816 \cdot 1,04$$

$$43264$$

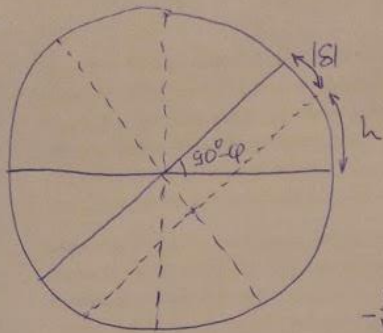
$$108160$$

$$1124864$$

$$2,24$$

$$1,12$$

Задача 2.



$$27000 : 13,34 =$$

$$27000 : 13 \approx 2000$$

$$2 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^9$$

$$\frac{T}{\pi l} =$$

$$h_{\text{от}} = 90^\circ - \varphi_{\text{от}} - |s|$$

$$= 90^\circ - 60^\circ - 3^\circ = 27^\circ$$

$$h_x = 90^\circ - \varphi_x - |s|$$

$$= 90^\circ - 72^\circ - 3^\circ$$

$$= 15^\circ$$

$$\frac{\pi l}{T} = 2 \sqrt{\frac{GM}{l}}$$

$$\frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi l}{2T} = \frac{\pi l}{T}$$

$$\frac{102,5^\circ - 30^\circ}{360^\circ} \cdot 24^h = \frac{72,5^\circ}{360^\circ \cdot 15} \cdot 24^h = \frac{72,5}{15} h = \sqrt{\frac{2GM}{l}} = 2 \sqrt{\frac{GM}{l}}$$

$$725 : 5 = 145$$

$$360 : 5 = 72$$

$$\frac{72,5}{60} : 15 = 4,5^h$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{2GM}{r^3}}$$

$$T = 2\pi r \sqrt{\frac{r^3}{2GM}}$$

$$T = 2\pi r \sqrt{\frac{r^3}{2GM}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2 r^4}{2GM}} = \frac{2}{\sqrt{GM}}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 32 \\ \hline 37,5 \cdot 3,14 \\ \hline 1500 \\ 375 \\ \hline 1125 \\ \hline 117750 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ 2,667 \\ \hline 13,34 \end{array}$$

$$37,5^\circ = 37,5 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ rad}$$

$$117,75 : 180$$

$$\frac{11775}{18000} =$$

$$\frac{4}{180 \cdot 6} = \frac{4}{1080}$$

$$= \frac{27000}{13,34}$$

$$0,4225 : 2 = 0,2112$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 0,794 \\ \hline 3,16 \end{array}$$

$$6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^5 = 6,67 \cdot 10^{-6}$$

$$117,75 : 180 = 0,65$$

$$\frac{11775}{1080}$$

$$\frac{975}{75}$$

$$\frac{300}{75}$$

$$\frac{330}{4225}$$

$$0,65 \cdot$$

$$\frac{2}{65 \cdot 65}$$

$$\frac{325}{4225}$$

$$\frac{330}{4225}$$

$$\frac{14 \cdot 14}{32}$$

$$\frac{196 \cdot 14}{784}$$

$$\frac{196}{2744}$$

$$\frac{196}{2744}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3,14 \cdot 3,14 \\ \hline 1256 \\ 314 \\ \hline 58536 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1256 \\ + 314 \\ \hline 342 \\ \hline 58536 \end{array}$$

$$\frac{2744 \cdot 9,8596}{13,34 \cdot 10^{-6}}$$