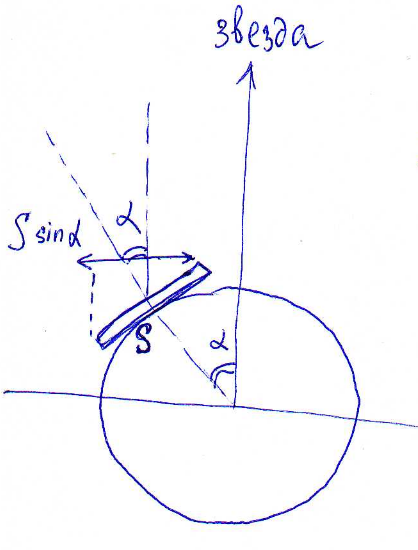
МАЙ-4

Задача 3

Дано:
$M_* = 2M_\odot$
$P_{орб} = 4$ года
$P_{ось} = 20$ ч
$S = 100$ м^2
$Э = 0{,}1$

$W(P_{ось}) - ?$



Решение:

Падающая на ~~(поверхность S)~~ энергия от звезды на поверхность S, наклонённой на угол α (между ⊥ к поверхности и направлением на звезду) равна:

$$L_{пад} = \frac{dW_{пад}}{d\tau} = L_* \cdot \frac{S\cdot \sin\alpha}{4\pi a^2};\quad a - \text{большая полуось планеты}$$

$$\Rightarrow dW_{пад} = L_* \frac{S\sin\alpha}{4\pi a^2} d\tau$$

Тогда производимая энергия: $dW_{произв} = Э\cdot dW_{пад}$

За 1 сутки производимую энергию можно (нужно) найти так:

$$W(P_{ось}) = 2\cdot\int_0^{P/4} dW_{произв} = 2\cdot\int_0^{P/4} \frac{Э L_* S \sin\alpha(\tau)}{4\pi a^2} d\tau$$

$\alpha(\tau) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{P}\cdot\tau$ — зависимость угла α от времени (начиная с восхода звезды — $\alpha = 90°$)

$$\Rightarrow W(P_{ось}) = \frac{\cancel{2}Э L_* S}{\cancel{4}2\pi a^2}\int_0^{P/4}\cos\left(\frac{2\pi\tau}{P}\right)d\tau = \frac{Э L_* S}{2\pi a^2}\cdot\int_0 \frac{P_{ось}}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi\tau}{P}\right)d\left(\frac{2\pi\tau}{P}\right) =$$

$$= \frac{Э L_* S P_{ось}}{4\pi^2 a^2}\sin\left(\frac{2\pi\tau}{P}\right)\Bigg|_0^{P/4} = \boxed{\frac{Э L_* S P_{ось}}{4\pi^2 a^2}}$$

Для звёзд главной последовательности: $L \sim M^{3,9} \approx M^4$

$$\Rightarrow L_* = 16 L_\odot$$

По III обобщённому з-ну Кеплера:

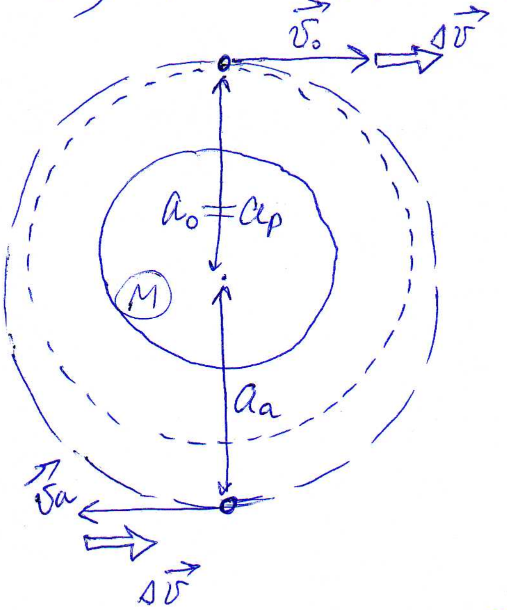
$$\frac{P_1^2 M_1}{P_2^2 M_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \Rightarrow \frac{P_{орб}^2}{P_\oplus^2}\frac{2M_\odot}{M_\odot} = \frac{a^3}{a_0^3};\quad a = a_0\sqrt[3]{32} \approx 3{,}2a_0$$

$$\Rightarrow W(P_{ось}) \approx \frac{0{,}1\cdot 4\cdot10^{26}\cdot \cancel{16}^{8}\cdot 100\cdot 7\cdot 10^4}{4\cdot 9\cdot 10\cdot \cancel{2}\cdot 10^{22}} \approx 10^8\cdot 6 = \boxed{6\cdot 10^8 \text{ Дж.}}$$

Ответ: около $6\cdot10^8$ Дж.

Задача: 1.

I) Предполагавшийся распорядок действий:



(здесь: a_0 — радиус геостационарной орбиты)

$a_0 = R_\oplus + h_{ГСО}$; $R_\oplus = 6{,}4 \cdot 10^6$ м

$h_{ГСО} \approx 40.000$ км $= 4 \cdot 10^7$ м

$\Rightarrow \boxed{a_0 \approx 4{,}6 \cdot 10^7 \text{ м}}$

$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a_0}}$ — нач. скорость

$v_p = 1{,}1\sqrt{\frac{GM}{a_0}} = 1{,}1 v_0$

$v_p = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a_0} - \frac{1}{a}\right)}$

$1{,}21\, v_0^2 = \frac{2GM}{a_0} - \frac{GM}{a} = 2v_0^2 - \frac{GM}{a}$

$a = \left(\frac{2v_0^2 - 1{,}21 v_0^2}{GM}\right)^{-1} = \left(0{,}79\, \frac{GM}{a_0 \cdot GM}\right)^{-1} = \boxed{\frac{a_0}{0{,}79}}$

(новая большая полуось спутника после прибавки к скорости.

$a_0 = a(1-e)$; $e = 1 - \frac{a_0}{a} = 1 - \frac{a_0}{a_0} \cdot 0{,}79 = 0{,}21$

$\Rightarrow a_a = a(1+0{,}21) = 1{,}21 a = \frac{1{,}21}{0{,}79} a_0$ — афелийное расстояние (когда будет отбавка скорости)

$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{GM}{a_0}}\sqrt{\frac{0{,}79 \cdot 0{,}79}{1{,}21}} = \sqrt{\frac{GM}{a_0}}\,\frac{0{,}79}{1{,}1}$

$\boxed{v_a' = 0{,}9 v_a = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}79}{1{,}1} v_0}$ — конечная скорость

$v_a'^2 = GM\left(\frac{2}{a_a} - \frac{1}{a'}\right) = \cancel{GM}\frac{2 \cdot 0{,}79}{a_0 \cdot 1{,}21} - \frac{\cancel{GM}}{a'} = \left(\frac{0{,}9 \cdot 0{,}79}{1{,}1}\right)^2 \frac{\cancel{GM}}{a_0}$

$a' = \frac{1}{\frac{2 \cdot 0{,}79}{a_0 \cdot 1{,}21} - \frac{0{,}9^2 \cdot 0{,}79^2}{1{,}21 \cdot a_0}} = \frac{1{,}21\, a_0}{2 \cdot 0{,}79 - 0{,}9^2 0{,}79^2} \approx \frac{1{,}21}{1{,}06} a_0 \approx \boxed{1{,}2\, a_0}$

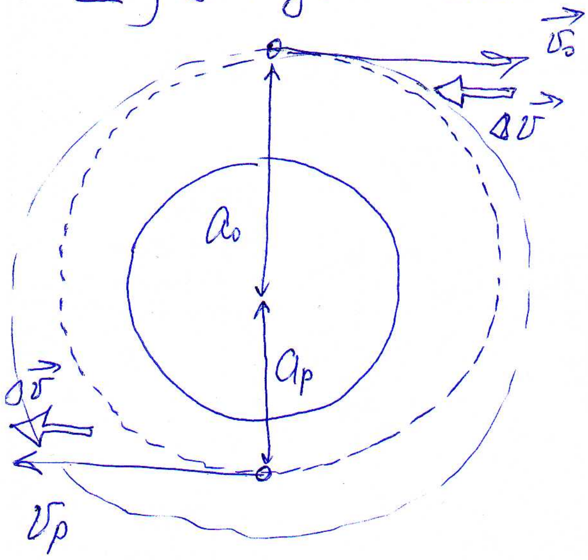
большая полуось орб. спутника после отбавки скорости.

$T_0 = 24^h$

$\Rightarrow \left(\frac{T'}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{a'}{a_0}\right)^3 \Rightarrow T' = 24^h \sqrt{1{,}2^3} \approx$

$\approx 24^h \sqrt{1{,}73} \approx 24 \cdot 1{,}3 \approx \boxed{31{,}2^h}$

II) Получившийся распорядок действий:



$v_0 - \Delta v = 0{,}9 v_0 = v_p$

$0{,}9 v_0 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a_0} - \frac{1}{a}\right)}$

$0{,}81 \frac{\cancel{GM}}{a_0} = \frac{2\cancel{GM}}{a_0} - \frac{\cancel{GM}}{a}$

$a = \frac{1}{\frac{2}{a_0} - \frac{0{,}81}{a_0}} = \frac{a_0}{1{,}19}$

новая большая полуось орб. сп после отбавки скорости.

$a = a_a = \cancel{a_0} = a_0/1{,}19\,(1+e)$; $e = \frac{a_a}{a} - 1$

$e = 1{,}19 - 1 = 0{,}19$

$\Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{1{,}19 \cdot 1{,}19}{0{,}81}} = v_0 \frac{1{,}19}{0{,}9}$ скорость аппарата через $0{,}5T$

$v_p' = 1{,}1 v_p = v_0 \frac{1{,}1 \cdot 1{,}19}{0{,}9}$ — после добавки скорости.

$v_p' = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a_p} - \frac{1}{a'}\right)}$; $\frac{GM}{a_0}\left(\frac{1{,}19 \cdot 1{,}1}{0{,}9}\right)^2 = \frac{\cancel{GM} \cdot 2}{a_0 \cdot 0{,}81} - \frac{\cancel{GM}}{a'}$

$a' = \frac{1}{\frac{2}{a_0 \cdot 0{,}81} - \frac{1{,}19^2 \cdot 1{,}1^2}{0{,}81 a_0}} = \frac{0{,}81 a_0}{2 - 1{,}19^2 \cdot 1{,}1^2}$

$a' \approx 3a_0$

Тогда $T' = 24^h \sqrt{\left(\frac{a'}{a_0}\right)^3}$; $T' = 24 \cdot \sqrt{3^3} = 24^h \sqrt{27} \approx 24^h \cdot 5{,}2 \approx$
$\approx 124{,}8^h$

Искомое $\Delta T = T'_{(II)} - T'_{(I)} = 124{,}8^h - 31{,}2^h = 93{,}6^h$

Задача 5.

Дано:

$\varepsilon = 30$ кэВ

$L = 10^{30}$ Вт

$M = 1{,}4 M_\odot$

$R = 10$ км

$\nu = \frac{1}{T_e}$

$B \sim r^{-3}$

$p_{мп} = kB^2$

$k = 4 \cdot 10^5 \frac{Па}{Тл^2}$

$r_м$ - ?

Решение:

Как известно, благодаря очень мощным магнитным полям ($\sim 10^{12}$ Тл), у нейтронных звёзд (НЗ) можно заметить в их спектре циклотронные линии, возникающие из-за вращения электронов в маг. поле около поверхности звезды.

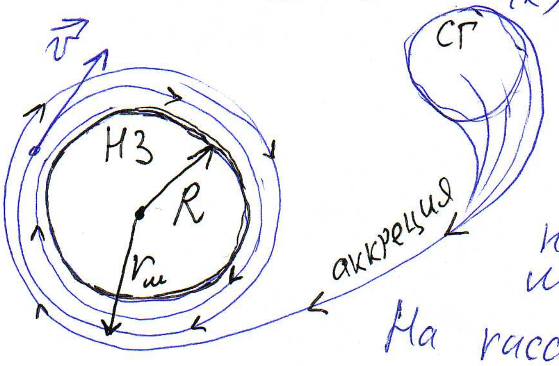
Определим $B(R)$ - индукцию маг. поля НЗ у её пов-ти:

$$\varepsilon = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{1}{T_e}$$

$$e v B = \frac{v^2 m_e}{r_e}; \quad v = \frac{eBr_e}{m_e} = \frac{2\pi r_e}{T_e}; \quad \boxed{T_e = \frac{2\pi m_e}{eB}}$$

(период вращения электрона в МП.)

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{h} = \frac{eB(R)}{2\pi m_e}; \quad B_{(R)} = \frac{2\pi m_e \varepsilon}{eh} = \boxed{\frac{m_e \varepsilon}{e\hbar}} \sim 10^7 \text{ Тл}$$



Найдём ~~дав~~ динамическое давление от аккреции на расстоянии $r_м$ - радиуса магнитосферы от центра НЗ:

На расстоянии $r = r_м$

$$p_{дин} = \frac{dF}{dS} = \frac{d(mv)}{d\tau \cdot dS} = \frac{dm \cdot v}{d\tau\, dS} = \sigma v;$$

σ — падающая масса в ед. времени на ед. площади звезды

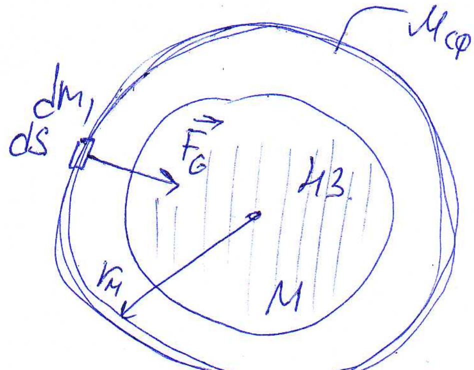
$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_м}}$$

$$p_{дин} = p_{мп}$$

$$\Rightarrow \sigma \sqrt{\frac{GM}{r_м}} = kB^2(r_м) = k\left[B(R)\left(\frac{R}{r_м}\right)^3\right]^2 = kB^2(R)\left(\frac{R}{r_м}\right)^6$$

$$\sigma\sqrt{GM} = kB^2(R) \cdot R^6 \cdot r_м^{-5,5}$$

$$\cancel{p_G = \frac{F_G}{dS}} \quad p_G = p_з + p_{сфера}$$



$$p_G = \frac{GM\,dm}{r_м^2\, dS} + \frac{GM_{сф}^2}{4\pi \cdot 2\, r_м^4} = \underbrace{\frac{GMM_{сф}}{4\pi r_м^4}}_{\text{гравитационное давление притяжения НЗ}} + \underbrace{\frac{GM_{сф}^2}{8\pi r_м^4}}_{\text{гравитационное давление притяжения аккреционной сферы}}$$

чистовик: стр 5/6 | МАИ-4

Задача 2

Дано:

$\varphi = +28^\circ$

$T_m = 00^h00^m$

$\alpha_S = 6^h45^m$

$\delta_S = -17^\circ$

$u = 1$ м/с

$\tau = 30$ с

$\Delta m_S - ?$

Решение:

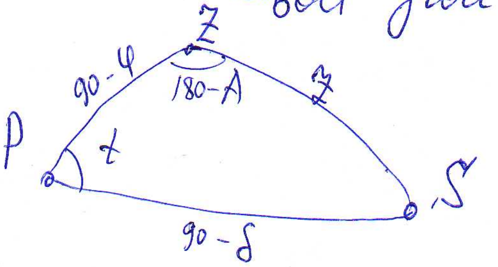
Найдём высоту наблюдения Сириуса:

$T_m = 12^h + t_\odot = 0^h00^m \Rightarrow t_\odot = 12^h$ – часовой угол Солнца.

$S = \alpha_S + t_S = \alpha_\odot + t_\odot$ – по определению звёздного времени. ($\alpha_\odot \approx 18^h$)

$\Rightarrow t_S = 18^h + 12^h - 6^h45^m = 23^h15^m = \boxed{360^\circ - 11{,}25^\circ}$

← часовой угол Сириуса

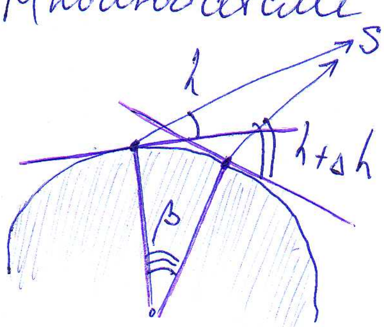


Из параллактического треугольника:

$\cos(90 - h) = \sin h = \sin\varphi \sin\delta_S + \cos\varphi \cos\delta_S \cos t_S$

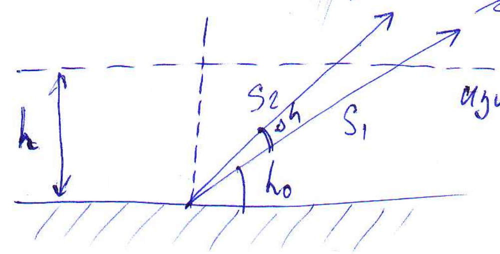
← высота (синус высоты) Сириуса

Наблюдатель идёт по направлению Сириуса



Тогда изменение высоты Сириуса равно: $\Delta h = \beta = \dfrac{u\tau \cdot 360^\circ}{2\pi R_\oplus} = 360^\circ \dfrac{30}{2\pi \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} \approx$

$\approx \dfrac{36 \cdot 3}{6 \cdot 64} \cdot 10^{1+1-5} (^\circ) = \dfrac{9}{32} 10^{-3} (^\circ) = 0{,}28 \cdot 10^{-3} (^\circ)$



Тогда путь света, проходимый через атмосферу изменился на:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{H}{\sin h_0} \\ S_2 &= \frac{H}{\sin(h_0 + \Delta h)} \end{aligned}\right\} \Delta S = H \frac{\sin(h_0 + \Delta h) - \sin h_0}{\sin^2 h_0} =$$

$$= H \frac{\sin h_0 \cos\Delta h + \cos(h_0)\Delta h - \sin h_0}{\sin^2 h_0} \approx H \cdot \operatorname{ctg} h_0 \cdot \Delta h = H \operatorname{ctg} h_0 \cdot \frac{u\tau}{R_\oplus}$$

~~При малых толщинах (геометрических) поглощающего свет вещества: $\tau \sim h$ – оптическая толщина пропорциональна её геометрической толщине; $\tau = \ln \frac{\Phi_0}{\Phi} = 9{,}4 \, sm \ln 10$ (изменению)~~

~~$\Rightarrow \Delta m \sim \tau$, $\Delta m = m(h + \Delta h) - m(h) = +2{,}5 \lg \frac{\Phi(h)}{\Phi(h + \Delta h)}$~~

~~$\Delta m = +2{,}5 \lg(e^\tau) = 2{,}5\tau \lg e = 2{,}5 \lg(e) \Delta S$~~

~~$\Delta m = 2{,}5 \lg(e)$~~

6/22.

$\Delta m \sim \Delta h$ – поглощение света атмосферой.

Задача 4

Дано:

$m_{Iт} = m'_{зв} = 5{,}7^m$

$r_{зв} = 0{,}31$ кпк

$M = -2{,}5^m$

X – ?

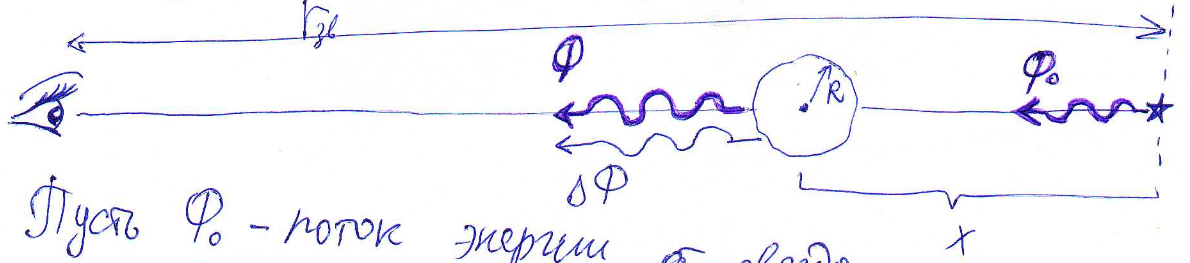
Решение:

Сразу же ответим на последний вопрос: если бы звезда была ближе, мы бы видели её с видимой зв величиной:

$$m_{зв} = M + 5\lg\frac{310}{10} = -2{,}5 + 5\lg 31 \approx -2{,}5 + 2{,}5 = 0$$

Из-за своей большой яркости отражённый от туманности свет не был бы виден.

$\Rightarrow$ звезда находится за туманностью.



Пусть Φ_0 – поток энергии от звезда.
Φ – поток энергии от звезды после прохождения туманности.
$\Delta\Phi$ – поток энергии от туманности.

$$\Phi = \Phi_0 \cdot 10^{0{,}4(m_{зв}-m'_{зв})} = \Phi_0 \cdot 10^{0{,}4\cdot 5{,}7} \approx \Phi_0 \cdot 10^{2{,}3} \approx 120\,\Phi_0$$

$$\tau = \ln\frac{\Phi_0}{\Phi} = \ln 10^{2{,}3}$$ – оптическая толщина туманности

$$\Phi = \Phi_0 \cdot 10^{-2{,}3}$$

$$\underbrace{m'_{зв}}_{m_{Iт}} - m_{зв} = -2{,}5\lg\frac{\Delta\Phi\, r^2}{(r-x)^2\Phi_0} \approx -2{,}5\lg\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0};$$ $x \ll r$ – потом можем доказать.

$$\Rightarrow \Delta\Phi = \Phi_0 \cdot 10^{0{,}4(5{,}7-0)} = \Phi_0 \cdot 10^{2{,}3} = \Phi$$ – от туманности.

Энергия, упавшая от звезды на туманность:

$$\Delta\Phi_0 = \Phi_0 \cdot \frac{R^2}{4x^2} = \Phi_0\left(\frac{R}{2x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \tau_T = \ln\left(\frac{\Delta\Phi_0}{\Delta\Phi}\right) = \ln\left(\left(\frac{R}{2x}\right)^2 \cdot 10^{-2{,}3}\right)$$ – оптическая толщина туманности.