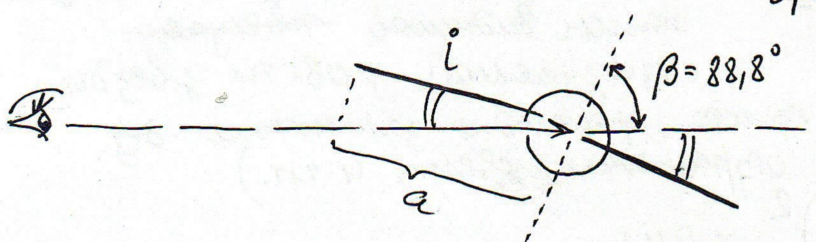
РЕШЕНИЕ:

МАЙ-4
класс 11

Имеем затменно-переменную систему, состоящую из звезды радиуса R и планеты радиуса r ($a = 3$ млн.км; $P = 1{,}4$ дн). Угол наклона орбиты планеты к лучу зрения равен: $i = 90° - \beta$

$i = 1{,}2°$



(не важно: проходит планета выше центра звезды для нас, или ниже).

Из III обобщ. закона Кеплера можем оценить сумму масс планеты и звезды (или массу звезды, если $M_{пл} \ll M_{зв}$)

$$\frac{P^2(M_{пл}+M_{зв})}{a^3} = \frac{P_\oplus^2 M_\odot}{a_\oplus^3}; \quad \frac{M_{пл}+M_{зв}}{M_\odot} = \left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^3 \cdot \left(\frac{P_\oplus}{P}\right)^2$$

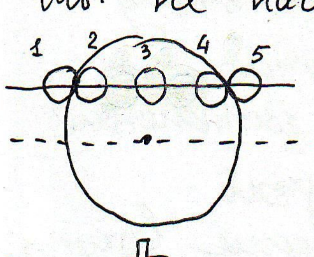
$$\frac{M_{пл}+M_{зв}}{M_\odot} = \left(\frac{3\cdot 10^9 м}{1{,}5\cdot 10^{11} м}\right)^3 \cdot \left(\frac{365{,}26}{1{,}4}\right)^2 = (2\cdot 10^{-2})^3 \cdot (26{,}8)^2 \approx 5{,}75\cdot 10^{-3}$$

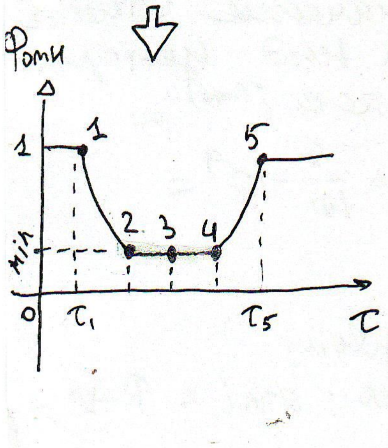
Видно, что звезда намного легче Солнца. Возможно это карлик (красный или коричневый), но необходимо ещё оценить радиус ~~для δ~~)

Относительный поток: $\Phi_{отн} = \frac{\Phi_i}{\Phi_0}$ – отношение i-го потока, приходящего от звезды к потоку от неё, когда её диск не затменён планетой.

$\Phi_{отн\,max} = 1$; $\Phi_{отн\,min} = 0{,}43$

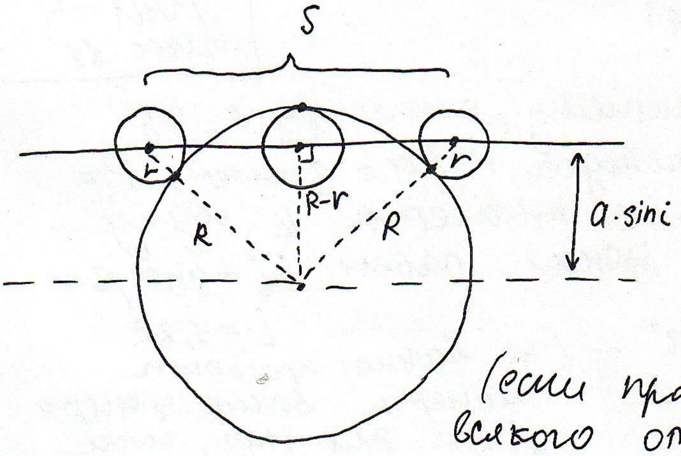
Разберёмся с типом затмения: во-первых ~~зве~~ планета не проходит через центр звезды, т.к $i \neq 0$. Во-вторых мы не наблюдаем плато на графике, то есть если бы планета полностью на некоторое время ($\tau_5-\tau_1$) заходила на диск звезды, то ~~это~~ за это же время относительный поток от неё оставался неизменным (пренебрегая потемнением краев звезды).





Это значит, что затмение как минимум должно быть касательным, либо планета будет заходить не полностью на диск звезды.

Если затмение касательное, то можно найти путь, а соотв-но и время прохождения планеты:



$S = 2\cdot\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}$

$S = 4\sqrt{Rr}$ – путь планеты по орбите за время затмения.

$\Phi \sim S_{пов}$ – поток пропорционален видимой ~~светящ~~ излучаемой пов-ти звезды (если просто происходит затмение без всякого отражения света и т.п.)

$\Rightarrow \Phi_{min} = \frac{R^2-r^2}{R^2} = 1-\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 0{,}43$

$\Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt{1-0{,}43} = \sqrt{0{,}57} \approx 0{,}755 = \eta$ – отношение радиуса планеты к звезде.

$S = 4\sqrt{Rr} = \tau_з\cdot v_{пл} = \tau_з\cdot\frac{2\pi a}{P}$

$4\sqrt{R^2\eta} = \frac{\tau_з\cdot 2\pi a}{P}$; $R = \frac{2\pi a\tau_з}{P\cdot 4\sqrt{\eta}}$ – радиус звезды

$\tau_з = 8$ мин – из графика.

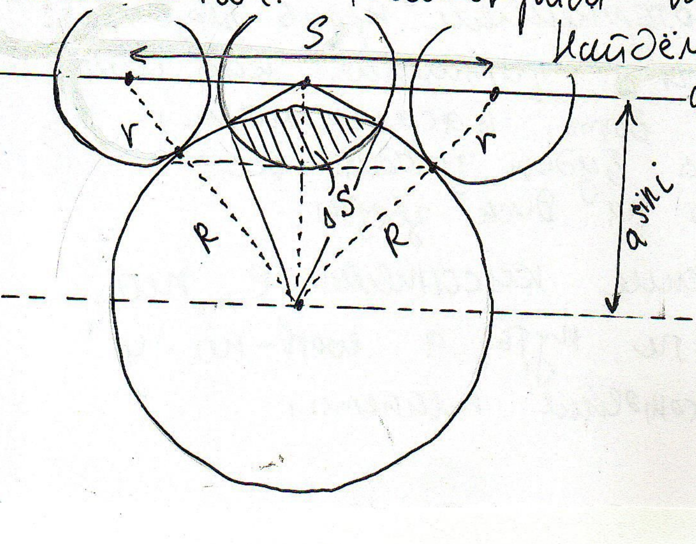
$R = \frac{2\cdot3{,}14\cdot3\cdot10^9 м\cdot 8\cdot 60}{1{,}4\cdot 86400\cdot 4\cdot 0{,}86} \approx \frac{8\cdot3\cdot3\cdot8\cdot6}{\cancel{14}\cdot864\cdot\cancel{4\cdot86}}\cdot\frac{10^9\cdot10}{10^{-1}\cdot10^2\cdot10^{-2}} =$

$= 10^{9+1+1-2+2}\cdot\frac{54}{7\cdot864\cdot43} = \frac{1}{4800}\cdot10^{11} = \frac{1}{48}\cdot10^9 \approx \boxed{2\cdot10^7 (м)}$

$R_\odot \approx 7\cdot10^8$ м $\Rightarrow \boxed{R \approx 2{,}9\cdot10^{-2}R_\odot}$

$r = 2{,}9\cdot10^{-2}\cdot0{,}755R_\odot = \boxed{2{,}2\cdot10^{-2}}$ – планета по размерам ($=0{,}755R$) мало отличается от звезды, поэтому говорить, что $M_{пл} \ll M_{зв}$ не совсем корректно.

Также мы сделали оценку радиусов, когда затмение касательное. Рассмотрим теперь общий случай:



Найдём минимальное значение высоты орбиты планеты над центром звезды: $a\sin i \approx a\cdot i^{(рад)} =$

$= 3\cdot10^9 м\cdot\frac{1\cdot3}{180} = \frac{9}{180}\cdot10^9 =$

$= \boxed{5\cdot10^7 м}$

В нашем первом приближении: $a\sin i = R - r =$

$= R\cdot(1-0{,}755) \approx 0{,}5\cdot10^7$ (м) – меньше, чем $a\sin i$, значит затмение точно не касательное.

Из рисунка можем определить: $(R+r)^2 = (0{,}5S)^2 + (a\sin i)^2$

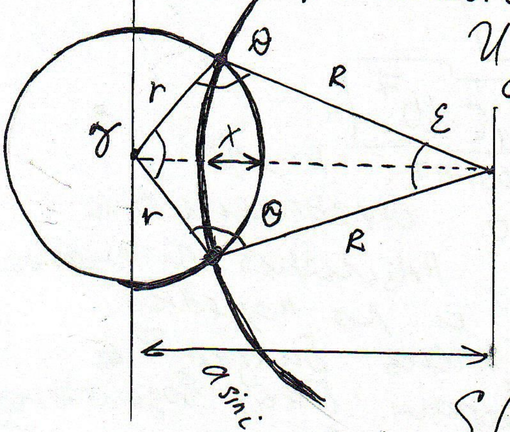
$$R+r = \sqrt{\left(0{,}5\cdot\frac{2\pi a}{P}\cdot\tau_з\right)^2 + (a\sin i)^2}$$

$$R+r = \sqrt{\left(\frac{3\cdot 3\cdot10^9\,м\cdot 8\cdot 60}{7{,}4\cdot 86400}\right)^2 + (5\cdot10^7)^2} \approx \sqrt{(3\cdot10^7)^2+(5\cdot10^7)^2} =$$

$\boxed{\text{Пусть: } \Sigma R = R+r}$

$$\approx \boxed{5{,}8\cdot10^7\ (м)} \ll R_\odot\ (=7\cdot10^8\,м)$$

$\Phi_{min} = \frac{\Delta S}{\pi R^2}$, ~~где $\Delta S =$~~ Осталось найти площадь ΔS через радиусы R и r, и сможем определить их значения.



Из рисунка:

$$S(\ ) = S(\ ) + S(\ ) - S(\ )$$

$$\Rightarrow \Delta S = S(\ ) = S(\ ) - S(\ ) - S(\ )$$

$$x = (r+R) - a\sin i$$

$$x = 5{,}8\cdot10^7\,м - 5\cdot10^7\,м = 8\cdot10^6\ (м)$$

$$S(\ ) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot R\cdot\sin\Theta = rR\sin\Theta$$

$$\cos\Theta = \frac{r^2+R^2-(a\sin i)^2}{2rR};\quad \sin\Theta = \sqrt{1-\left(\frac{r^2+R^2-(a\sin i)^2}{2rR}\right)^2}$$

$$S(\ ) = \pi r^2\cdot\frac{\gamma}{360^\circ};\quad \gamma = 2\cdot\arccos\left(\frac{r^2+(a\sin i)^2-R^2}{2r\,a\sin i}\right)$$

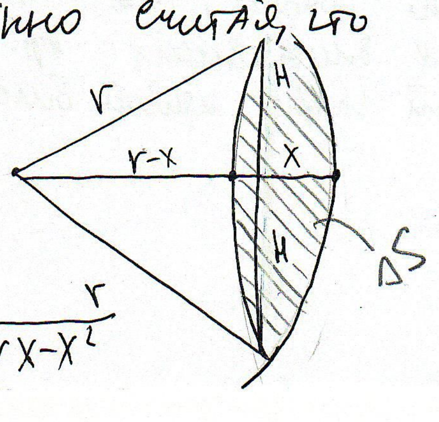
$$S(\ ) = \pi R^2\cdot\frac{\varepsilon}{360^\circ};\quad \varepsilon = 2\cdot\arccos\left(\frac{R^2+(a\sin i)^2-r^2}{2R\,a\sin i}\right)$$

Поехали считать: $\boxed{r = 5{,}8\cdot10^7\,м - R}$ $\boxed{a\sin i = 5\cdot10^7\,м}$

Можно упростить расчёты, приближённо считая, что

~~$\Delta S = S(\ ) = S(\ ) - S(\ )$~~

~~$S(\ ) = \frac{1}{2}r^2\sin\gamma = \frac{1}{2}r^2\cdot 1$~~



$$\Delta S \approx 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot H = xH, \text{ где}$$

$$H = \sqrt{r^2-(r-x)^2} = \sqrt{r^2-r^2+2rx-x^2} = \sqrt{2rx-x^2}$$

Тогда: $\Delta S = \Phi_{min}\cdot\pi R^2 = x\sqrt{2xr - x^2}$

$$\Phi_{min}\cdot\pi R^2 = x\cdot\sqrt{2x\cdot((\Sigma R)-R) - x^2}$$

$$\frac{\Phi_{min}^2\pi^2R^4}{x^2} = 2x((\Sigma R)-R) - x^2 = 2x(\Sigma R) - 2xR - x^2$$

$$\frac{\Phi_{min}^2\pi^2R^4}{x^2} + 2xR - 2x(\Sigma R) + x^2 = 0$$ – ур-е 4-ой степени.

$$\frac{9\cdot 0{,}2}{(8\cdot10^6)^2}\cdot R^4 + R\cdot 16\cdot10^6 - 2\cdot 8\cdot10^6\cdot 5{,}8\cdot10^7 + (8\cdot10^6)^2 = 0$$

$$0{,}03\cdot10^{-12}R^4 + 16\cdot10^6R - 83\cdot10^{13} + 64\cdot10^{12} = 0$$

$$0{,}03\cdot10^{-12}R^4 + 16\cdot10^6R - 77\cdot10^{13} = 0 \quad \Big|: 10^{-12}\cdot 0{,}03$$

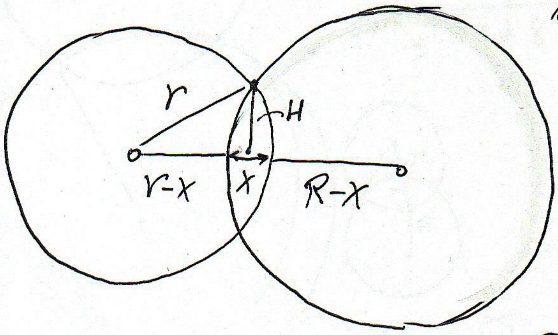
$$R^4 + 5{,}3\cdot10^{20}R - 25{,}7\cdot10^{27} = 0$$

⟶ решение ур-я: $\boxed{R \approx 1{,}2\cdot10^7 (м)}$

Тогда $r = 5{,}8\cdot10^7 - 1{,}2\cdot10^7 = \boxed{4{,}6\cdot10^7}$

Мы получили абсурдный результат: $r > R$. Ошибка в первую очередь связана с определением площади ΔS. Но так или иначе, размеры планеты сопоставимы с размерами звезды и по порядку равны $\sim 10^7$ м. Планета ~~он~~ находится очень близко к звезде и достаточно большая по размерам. Она, возможно, принадлежит к классу горячих Юпитеров (с температурой пов-ти $\sim 1500°K \div 2000°K$). Таких планет достаточно много было обнаружено. Звезда, исходя из её массы и размеров не может принадлежать к классу белых карликов, масса которых согласно пределу Чандрасекара: $\sim 1{,}44 M_\odot$. Поэтому она с большой вероятностью относится к красным или бурым карликам. Однако это спорный вопрос, т.к их светимость очень мала и даже для ближайших кр. карликов получить такой гёкми-вый график кривой блеска сложно. (межзвёздная среда)

Если размеры ~~сол~~ планеты и звезды сопоставимы, то есть более точный способ оценки ΔS:



$$\Delta S \approx 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot H, \text{ где}$$

$$H = \sqrt{r^2 - \left(r - \frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - r^2 + rx - \frac{x^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{rx - \frac{x^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \Phi_{min} \cdot \pi R^2 = x \cdot \sqrt{rx - \frac{x^2}{4}}$$

$$\Phi_{min}^2 \cdot \frac{\pi^2 R^4}{x^2} = rx - \frac{x^2}{4} = ((\Sigma R) - R)\, x - \frac{x^2}{4}$$

$$R^4 \cdot \frac{\Phi_{min}^2 \pi^2}{x^2} + Rx - x \cdot (\Sigma R) + \frac{x^2}{4} = 0$$

$$0{,}03 \cdot 10^{-12} R^4 + 8 \cdot 10^6 R - 42 \cdot 10^{13} + 16 \cdot 10^{12} = 0$$

$$\boxed{R^4 + R \cdot 2{,}7 \cdot 10^{20} - \frac{40}{0{,}03} \cdot 10^{25} = 0}$$

Ответ: $R \approx r \sim 10^7$ м.