Лист 1 из 3

СПб-177

1

Оценим ~~ер~~ угловое разрешение Хаббла: $\theta \approx 1{,}22\frac{\lambda}{D}$. Т.к. $1\text{Å} = 10^{-10}$ м, то искомое угловое разрешение будет равным $\theta \approx 1{,}22\cdot\frac{3\cdot10^{-7}}{2{,}4} = 1{,}22\cdot\frac{3}{2{,}4}\cdot10^{-7} = 1{,}22\cdot\frac{30}{24}\cdot10^{-7} = \frac{1{,}22\cdot5}{4}\cdot10^{-7} = \frac{1{,}22\cdot10}{8}\cdot10^{-7} \approx 1{,}5\cdot10^{-8}$ (т.к. $12 = 8\cdot1{,}5$).

Заметим, что „впервые разрешить" указывает на то, что при такой длине волны такая двойная система еле разрешилась. Значит, искомое расстояние $-\ 1{,}5\cdot10^{-8}$ радиан.

Но привычнее перевести в ~~сек~~ угловые секунды, что мы и сделаем: в 1 радиане содержится $\frac{180\cdot3600}{\pi} \approx 206265''$.

Округлим это число до тысяч и переведём радианы в секунды: $\theta \approx 1{,}5\cdot10^{-8}\cdot206\cdot10^{3} = 309\cdot10^{-5} \approx 3{,}1\cdot10^{-3}{}''$ или 310 рад

2

Заметим, что описываемый угол в условии гарантированно плоский, т.к. это угол между 2 линиями, что позволяет нарисовать следующую ~~кр~~ картинку (рис. 1):

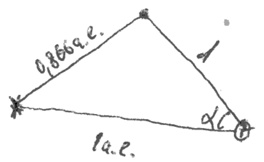

рис. 1 $\alpha = 60°$

~~Значит~~ Также отметим то, что $0{,}866 \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда, если расстояние до астероида d, то применив теорему косинусов, можно записать следующее уравнение:

$0{,}866^2 = 1^2 + d^2 - 2\cdot1\cdot d\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{3}{4} = 1 + d^2 - d \Leftrightarrow d^2 - d - \frac{1}{4} = \left(d - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$

Значит, расстояние до астероида 0,5 а.е.

Т.к. оптические свойства у поверхности астероида такие же, как и у Луны, то и альбедо у него будет то же самое. ~~она~~ Если поверхностая яркость Солнца на Земле равна $f_\odot$, то на астероиде это $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot f_\odot = \frac{4}{3}f_\odot$. Значит, ~~на него~~ он отражал всего $L = \pi R^2\cdot\frac{4}{3}f_\odot\alpha$, где α – альбедо (конечно, это не сферическое альбедо, но и у Луны мы посчитаем альбедо по такому же принципу, так что ошибки от употребления такого вида альбедо не будет), а R – радиус астероида. На Земле поверхностная яркость такого астероида будет равна $f = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{\pi R^2\cdot\frac{4}{3}\alpha}{4\pi d^2}\cdot f_\odot = \frac{R^2\alpha}{3d^2}f_\odot$

Вычислим альбедо α. По аналогичным рассуждениям поверхностная яркость Луны $f_☾ = \frac{L_☾}{4\pi r^2} = \frac{\pi R_☾^2 f_\odot\alpha}{4\pi r^2} = \frac{R_☾^2}{r^2}\cdot\frac{\alpha}{4}f_\odot$, где r – расстояние от Земли до Луны. Тогда $\alpha = 4\frac{f_☾}{f_\odot}\left(\frac{r}{R_☾}\right)^2$. (это всё для полнолуния)

Значит, $\frac{f}{f_\odot} = \frac{R^2}{3d^2}\cdot4\cdot\frac{f_☾}{f_\odot}\cdot\frac{r^2}{R_☾^2} = \frac{4}{3}\frac{f_☾}{f_\odot}\cdot\left(\frac{R}{d}\right)^2\cdot\left(\frac{r}{R_☾}\right)^2$. Тогда звёздная величина астероида $m = M_\odot - 2{,}5\lg\frac{f}{f_\odot} =$

$= M_\odot - 2{,}5\lg\left(\frac{4}{3}\frac{f_☾}{f_\odot}\cdot\left(\frac{R}{d}\right)^2\cdot\left(\frac{r}{R_☾}\right)^2\right) = M_\odot - 2{,}5\left(\lg\frac{4}{3} + \lg\frac{f_☾}{f_\odot} + \lg\left(\frac{R}{d}\right)^2 + \lg\left(\frac{r}{R_☾}\right)^2\right) = M_\odot - 2{,}5\lg\frac{4}{3} - (M_\odot - M_☾) - 5\lg\frac{R}{d} - 5\lg\frac{r}{R_☾}$

Заметим, что $2{,}5\lg\frac{4}{3} = 2{,}5(\lg4 - \lg3) \approx 2{,}5(0{,}6 - 0{,}48) = 2{,}5\cdot0{,}12 = 0{,}3$; $\frac{R}{d} = \frac{50\text{ м}}{0{,}5\text{ а.е.}} = \frac{50\text{ м}}{1{,}5\cdot10^{11}\cdot0{,}5\text{ м}} = \frac{100}{1{,}5\cdot10^{11}} = \frac{200}{3\cdot10^{11}} = \frac{2}{3}\cdot10^{-9} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}5 \lg \frac{R}{d} \approx 2{,}5\left(\lg \frac{2}{3} + \lg 10^{-9}\right) = 2{,}5(\lg 2 - \lg 3 - 9) \approx 2{,}5(-9 - 0{,}48 + 0{,}3) = 2{,}5 \cdot (-9{,}18) \approx -23 \Rightarrow 5 \lg \frac{R}{d} \approx -46$

$\frac{r}{R_{☾}} \approx \frac{384 \cdot 10^3 км}{1{,}74 \cdot 10^3 км} = 10^{+2} \cdot \frac{384}{174} = 10^{+2}\left(2 + \frac{36}{174}\right) \approx 10^{+2}\left(2 + \frac{36}{180}\right) = 10^{+2}\left(2 + \frac{1}{5}\right) = 2{,}2 \cdot 10^{+2} \Rightarrow 5 \lg \frac{r}{R_{☾}} \approx 5 \lg (2{,}2 \cdot 10^2) = 5 \cdot \lg 2{,}2 + 10$

Вычислим $\lg 2{,}2$ с помощью ряда Меркатора: $\lg 2{,}2 = \lg 2 + \frac{\ln 1{,}1}{\ln 10} \approx 0{,}3 + \frac{0{,}1}{4{,}3} \approx 0{,}3 + 0{,}023 \approx 0{,}323$. Тогда $5 \lg 2{,}2 + 10 \approx 5 \cdot 0{,}323 + 10 \approx 11{,}6$.

Тогда ~~$m = -26{,}7 + 0{,}3 + (-26{,}7 + 12)$~~ $m = -26{,}7 - 0{,}3 - (26{,}7 + 12) + 46 - 11{,}6 = -27 + 14{,}7 + 46 - 11{,}6 = 19 + 3{,}1 \approx 22{,}1^m$

~~Оценим проницающую способность данного телескопа: $M = 6 + 5 \lg \frac{50}{0{,}6} = 6 + 5 \lg \frac{250}{3} \approx 6 + 5(\lg 2{,}5 - \lg 3 + \lg 100) = 6 + 5(\lg 10 - \lg 4 - \lg 3 + \lg 100) = 6 + 5(1 - 0{,}6 - 0{,}48 + 2)$~~

~~Оценим необходимый диаметр для наблю~~

Отметим, что это звёздная величина астероида в полной фазе. Так что оценим фазовый угол ψ из рис. 1:

$\cos \psi = \frac{0{,}866^2 + 0{,}5^2 - 1^2}{2 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}5} = \frac{3/4 + 1/4 - 1}{2 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 1/2} = 0 \Rightarrow \psi = 90° \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}$. Тогда света будет поступать в 2 раза меньше, а звёздная величина увеличится на $2{,}5 \lg 2 \approx 0{,}75$. Т.е. итоговая звёздная величина — $22{,}85^m$.

Оценим диаметр телескопа, необходимый для наблюдения: $22{,}85 = 6 + 5 \lg \frac{D}{d} \Rightarrow \lg \frac{D}{d} = \frac{16{,}85}{5} \Rightarrow D = d \cdot 10^{3{,}37}$. Если d — диаметр зрачка ($d = 0{,}6$ см), то $D > d \cdot 10^{3{,}3} = 2000 \cdot 0{,}6 = 1200$ см $= 12$ м. Очевидно, что 50 см явно не хватает.

3

Заметим, что аккреция идёт, притом с небольшой скоростью. Из этого можно сделать вывод об основном компоненте — ~~он идт~~ его размеры чуть-чуть больше полости Роша. Исходя из этого, можно оценить массу M основного компонента:

~~$0{,}14 = 0{,}10 \cdot \frac{1}{1+M} + (0{,}14 - 0{,}10) \cdot \frac{M}{1+M} = 0{,}10 \cdot \frac{1}{1+M} + 0{,}04 \frac{M}{1+M} = \frac{0{,}1 + 0{,}04M}{1+M}$~~ ~~(очевидно, что все расстояния считаются в а. е., а массы — в массах Солнца)~~

~~$0{,}14(1+M) = 0{,}1 + 0{,}04M$~~

~~$0{,}14 + 0{,}14M = 0{,}1 + 0{,}04M$~~

~~$0{,}1M =$~~

~~Так~~ ~~Можно считать, что радиус полости Роша основного компонента — это радиус от центра основного компонента до центра масс (вычисть это R). Тогда расстояние от центра масс до белого карлика $r = 0{,}14 - 0{,}1 = 0{,}04$ а. е. Если масса белого карлика m, то справедливо следующее:~~

~~$RM = rm \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{r}{R} \Rightarrow M = \frac{0{,}04}{0{,}10} \cdot 1 = 0{,}4 \mathfrak{M}_{\odot} \approx 8 \cdot 10^{29}$ кг~~

~~Тогда средняя плотность~~

Оценим радиус полости Роша. С одной стороны, вещество на его границе притягивается к основному компоменту с ускорением $g=\frac{GM}{R^2}$. С другой стороны, и вещество в центре компонента, и на краю полости Роша притягиваются к белому карлику. Тогда ~~относительное~~ ускорение вещества на краю относительно вещества в центре равно $a=\frac{Gm}{(a-R)^2}-\frac{Gm}{a^2}=g=\frac{GM}{R^2}$, где $a=0{,}14$ а.е. Тогда $M=R^2 m\left(\frac{1}{(a-R)^2}-\frac{1}{a^2}\right)$. Т.к. размерности этих величин не зависят друг от друга (длина и масса), то ~~одно~~ массы будем считать в $M_\odot$, а расстояние — в а.е.:

$M=1\cdot 0{,}10^2\left(\frac{1}{0{,}04^2}-\frac{1}{0{,}14^2}\right)=100\cdot10^{-4}\left(\frac{1}{16\cdot10^{-4}}-\frac{1}{196\cdot10^{-4}}\right)\approx 100(0{,}0625-0{,}005)=100\cdot0{,}062=6{,}2\,M_\odot\approx 1{,}24\cdot10^{31}$ кг.

Тогда плотность основного компонента $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac43\pi R^3}$. Заметим, что $\frac43\pi\approx\frac{12{,}56}{3}\approx4{,}2$, т.е. $\rho\approx\frac{M}{4{,}2R^3}=$

$=\frac{1{,}24\cdot10^{31}\text{ кг}}{4{,}2(0{,}1\cdot1{,}5\cdot10^{4}\text{ м})^3}\approx\frac{3\cdot10^{31}}{3{,}4\cdot10^{30}}\text{ кг/м}^3\approx\frac{0{,}34\cdot9\cdot10^{31}}{3{,}4\cdot10^{30}}\text{ кг/м}^3=9\text{ кг/м}^3.$

5

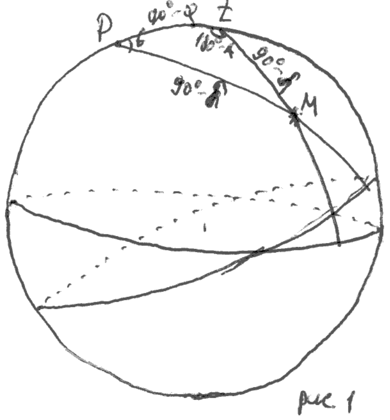

рис 1

$\cos(90°-h)=\cos(90°-\varphi)\cdot\cos(90°-\delta)+\sin(90°-\varphi)\cdot\sin(90°-\delta)\cdot\cos t$

Построим параллактический треугольник для Мурманска и применим к нему сферическую теорему косинусов относительно часового угла t (рис. 1). ~~Преоб~~ Преобразуем для него выражение: $\sin h=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t$. Для $t=0$ получаем, что $\cos(90°-h)=\cos(\varphi-\delta)$ или $h=90°-\varphi+\delta$, что является правдой. Значит, все составлено верно.

Однако обратим внимание, что φ и δ достаточно близки к $90°$ и если сказать, что $\varphi=90°-\rho$ а $\delta=90°-p$, то $\cos\varphi\approx\rho$, а $\sin\delta\approx p$. Однако нужно это выразить в радианах: $\rho=90°-\varphi=21°2'\approx\frac{21{,}0}{57{,}3}\approx0{,}366$; $p=90°-\delta=20°20'\approx0{,}354$. Значит $\cos\varphi\cos\delta\approx\rho p\approx0{,}366\cdot0{,}354\approx0{,}130$, а $\sin\varphi\cdot\sin\delta=\cos\rho\cdot\cos p\approx\left(1-\frac{\rho^2}{2}\right)\left(1-\frac{p^2}{2}\right)\approx1-\frac{\rho^2+p^2}{2}\approx$

$\approx1-\frac{0{,}134+0{,}125}{2}=1-\frac{0{,}259}{2}\approx1-0{,}13=0{,}87$

Заметим, что высота в нижней кульминации $h=\varphi-90°+\delta=-\rho+\delta=69°20'-21°2'=48°18'$, т.е. рефракцией можно пренебречь, а Землю считать плоской. Рассмотрим тогда плоский слой атмосферы (рис. 2)

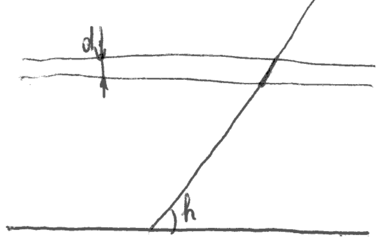

рис.2

Пусть у какого-то i-того слоя „пробег фотона" (т.е. расстояние, на котором оптическая толщина $\tau=1$) равен ~~l~~ l_i. Тогда, если толщина такого слоя ~~d~~ d_i, то расстояние, которое пробежит свет, равен $\frac{d}{\sin h}$. Тогда интенсивность света $I_i = I_{i-1}\cdot\exp{-\tau_i} = I_{i-1}\cdot\exp\frac{d_i}{l_i\cdot\sin h}$. Значит, разность звёздных величин $\Delta m_i = -2,5\cdot\lg\exp{-\tau_i} = -2,5\cdot\lg\left(10^{\lg e}\right)^{-\tau_i} = 2,5\cdot\lg e\cdot(\tau_i) \approx 1,086\tau_i$. Значит, разность звёздных величин просто равна сумме оптических толщин на 1,086. Но $\sum_i \tau_i = \sum_i \frac{d_i}{l_i\sin h} = \frac{1}{\sin h}\sum_i \frac{d_i}{l_i} = \frac{\tau_0}{\sin h}$, где τ_0 — оптическая толщина атмосферы в зените. Тогда $\frac{\Delta m_1}{\Delta m_2} = \frac{\sin h_2}{\sin h_1}$

Для того, чтобы выяснить оптическую толщину атмосферы, ~~сначала~~ обратимся к Солнцу. Известно, что поверхностная яркость Солнца в вакууме 1386 Вт/м², то в зените в атмосфере только 1000 Вт/м². Тогда изменение звёздной величины $\Delta m = 2,5\lg 1,386 \approx 2,5\frac{\ln 1,386}{\ln 10} \approx 2,5\frac{0,386}{4,39} \approx 0,204 \approx 1,086\tau_0$. Значит, в зените звёздная величина λ Дракона равна 4^m, а $\Delta m = \frac{0,2^m}{\sin h}$

Тогда искомая зависимость звёздной величины $m = 4 + \frac{0,2}{0,87+0,13\cos t}$

4

Заметим, что пульсации отклоняются от среднего периода потому, что нейтронная звезда (далее — НЗ) отдаляется/приближается. Очевидно, что для отклонения Δt справедливо: $\frac{\Delta t}{t} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = 10^{-4}c \approx 30$ км/с

Заметим, что H_α — это первая линия серии Бальмера. Так как я не помню, чему равна её длина, то буду выводить.

Длина H_α — это длина фотона, который переходит со 3 энергетического уровня водорода на 2. При этом его энергия $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \varepsilon\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_j^2}\right)$, откуда $\lambda = \frac{hc}{\varepsilon\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_j^2}\right)}$. Здесь $\varepsilon = 13,6$ эВ $\approx 1,6\cdot10^{-19}\cdot13,6 \approx 2,18\cdot10^{-18}$ Дж, $h \approx 6,6\cdot10^{-34}$ Дж·с, а $c \approx 3\cdot10^8$ м/с. Также по определению $n_i = 2$, $n_j = 3$ $\Rightarrow \lambda = \frac{6,6\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}{2,2\cdot10^{-18}\cdot\frac{5}{36}} = \frac{6,6\cdot3}{2,2\cdot5/36}\cdot\frac{10^{-34}\cdot10^8}{10^{-18}} \approx 65\cdot10^{-8}$ м ≈ 6500 Å.

~~Но ведь найдём~~ Тогда $v = c\cdot\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 3\cdot10^5\frac{0,5}{6500} = \frac{3\cdot10^5}{13\cdot10^3} \approx 0,23\cdot10^2 = 23$ км/с

Также, если расстояние от НЗ до центра масс r, а от звезды главной последовательности до центра масс $a-r$, то

Справедливо следующее равенство: $MR = mr$ (M и m – массы НЗ и звезды главной последовательности соответственно). Но угловые скорости у них одинаковы, так что $Mv_M = mv_m \Rightarrow m = M\dfrac{v_M}{v_m} \approx 1{,}4 \cdot \dfrac{30}{23} \approx 0{,}0609 \cdot 30 \approx 1{,}83\,\mathfrak{M}_\odot$.

Отметим, что для таких звёзд $L \sim \mathfrak{M}^4$, т.е. $L \approx (2-0{,}17)^4 = (2-2\cdot 0{,}065)^4 = 2^4(1-0{,}065)^4 \approx 16(1-4\cdot 0{,}065) = 16(1-0{,}26) = 16-4{,}16 \approx 12\,L_\odot$

Отметим, что НЗ чрезвычайно тусклые (т.к. имеют малые размеры) и вклада в общую светимость не вносят.

Тогда общая светимость системы – $\approx 12\,L_\odot$