СПБ-094

На изображении видны две петли, которые образовались из-за силовых линий магнитного поля. Сделаем для начала первое приближение: петли — это „трубки“, которые представляют собой ~~дг~~ дуги окружности, „стоящие“ перпендикулярно поверхности (рис. 1)

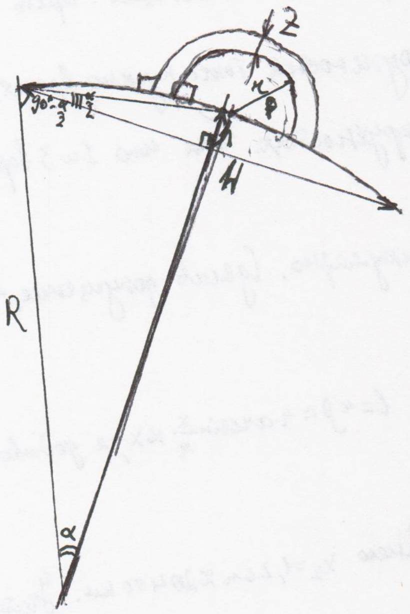


рис. 1

Измерим H (наибольшую хорду солнечной поверхности). Она равна $16{,}5 \pm 0{,}1$ см.

Измерим h (~~черно~~ срединный перпендикуляр к H). Он равен $0{,}8 \pm 0{,}1$ см.

Т.к. ~~хорда~~ h делит хорду H пополам, то h лежат на диаметре.

Отметим, что тогда $\arctan \frac{H/2}{h} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Но угол ~~...~~ α мало,

т.е. можно сказать, что

$$\frac{h}{H/2} = \tan\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{4h}{H} = \frac{3{,}2\text{ см}}{16{,}5\text{ см}} = \frac{\frac{16{,}5}{5} - 0{,}1}{16{,}5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{165} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{33}\right) \approx$$
$$\approx 0{,}2(1 - 0{,}03) \approx 0{,}20 \text{ радиан.}$$

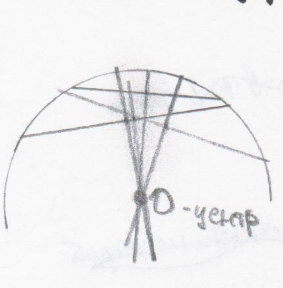
~~Толщину внутренней петли~~

Значит, $H/2 = R \cdot \sin\alpha \approx 700 \cdot 0{,}4 = 280$ тыс. км. Т.к. 280 тыс. км соответствует 16,5 см, то на 1 см приходится $\frac{280}{16{,}5} = 100 \cdot \frac{7 \cdot 4}{11 \cdot 3 \cdot 5} = 80 \cdot \frac{7}{33} \approx 80 \cdot 0{,}212 = 16{,}96 \approx 17{,}0$ тыс. км.

~~Будем~~ Измеренные толщину и радиус внутренней петли будем обозначать z_1 и r_1, соответственно, а толщину и радиус внешней петли — как z_2 и r_2 соответственно.

Измеренные значения: $z_1 = 0{,}8$ см; $z_2 = 0{,}7$ см; $r_1 = 1{,}5$ см; $r_2 = 2{,}0$ см.

z измерялось в тех местах, где петля не слишком тонкая, но и не слишком толстая. r измерялось более изощрённым способом: брались 3 хорды, проводились соответствующие 3 диаметра, примерная точка их пересечение является центром окружности (рис. 2). ~~Потом~~ Бралась точка на середине петли, где измерялось z и между центром и точкой проводился радиус.



Т.к. петли — это половины окружностей, то искомый объём

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi z_1^2}{4} \cdot \pi r_1 + \frac{\pi z_2^2}{4} \cdot \pi r_2\right) = \frac{\pi^2}{8}\left(z_1^2 r_1 + z_2^2 r_2\right)$$

Переведя измеренное в реальный масштаб ($z_1 = 13600$ км, $z_2 = 11900$ км, $r_1 = 25500$ км, $r_2 = 34000$ км), а также воспользовавшись, что $\frac{\pi^2}{8} \approx 1{,}2$, получаем, что

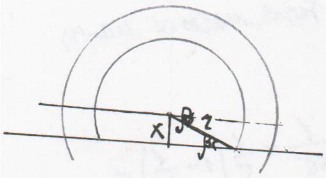
$$V \approx 1{,}2(\cancel{1080}(183 \cdot 25{,}5 + 144 \cdot 34) \approx 1{,}2(4100 + 4900) = 1{,}2 \cdot 9000 \approx 11000\ (\text{тыс. км})^3 = 11 \cdot 10^{12}\ \text{км}^3.$$

Конечно, я за точностью не гнался, но есть чувство, что даже 2 значащая цифра тут неверна. Поэтому хочется улучшить результат.

Можно пойти различными путями: аппроксимировать петлю эллипсом, учесть то, что петли не перпендикулярны поверхности Солнца или учесть непостоянство толщины петли.

В первом варианте нужно будет считать периметр эллипса. О точной формуле и речи быть не может: брать эллиптические интегралы я не умею, а на аппроксимацию эллипса дугами окружностей тоже нужно время. С другой стороны, толщины петель разнее как раз на этих аппроксимирующих окружностях. Так что 1 и 3 варианты лучше сделать вместе.

Однако на рисунке видно, что петли входят на поверхность Солнца не перпендикулярно. Сделав допущение, что поверхность Солнца в пределах этих петель плоская, сделаем рис. 3:



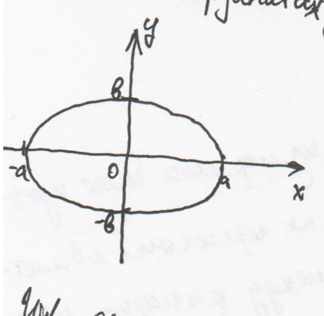
Из этого рисунка ясно, что добавочный периметр: $l = r\beta = r\cdot\arcsin\frac{x}{r} \approx x$, а добавочный объём $V = \frac{\pi z^2}{4}\cdot l = \frac{\pi}{4} z^2 x$

У внутреннего кольца $x_1 \approx 0,7$ см ≈ 11900 км, а у внешнего $x_2 \approx 1,2$ см ≈ 20400 км. Учитывая, что $\frac{\pi}{4} \approx 0,79$, получаем, что $V = \frac{\pi}{4}(z_1^2 x_1 + z_2^2 x_2) \approx 0,79(13,6^2\cdot 11,9 + 11,9^2\cdot 20,4) \approx 0,8(183\cdot 12 + 144\cdot 20,5) \approx 0,8\cdot(2200+2900) \approx 0,8\cdot 5100 \approx 4100$ (тыс. км)^3. В итоге объём составит приблизительно $15\cdot 10^{12}$ км^3.

Теперь хорошо бы аппроксимировать петлю чем-то более точным, чем окружность. Так как эллипс не подходит прямо, то его также аппроксимируем.

У эллипса есть большая полуось a и малая полуось b. Тогда его эксцентриситет ε связывает a и b как $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1-\frac{b}{a}}$. ~~Так как нужно~~ Будем считать, что этого достаточно.

Эллипс в координатах задаётся уравнением $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Ясно, что лучше всего подойдут ~~окр~~ для аппроксимации окружности, кривизны которых совпадает с кривизной эллипса в точках (a;0) и (0;b).



~~Чтобы найти кривизну, обратимся к физике.~~
~~Учтём, что эллипс можно задать и параметрически: $x = a\cdot\cos t$, $y = b\cdot\sin t$. Тогда~~
~~В точке (0;b): $t = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-a\cdot\sin t}{b\cdot\cos t}$~~

~~Что значит иметь равную кривизну? Это значит, что при движении по ... в окрестности некоторой точки~~ угол ~~некоторой~~ между векторами

Отметим, что параметрически эллипс задаётся как $x = a\cdot\cos t$; $y = b\sin t$, а радиус касательной окружности в ~~$x = R\cdot\cos$~~ точке (0;b) — $x = R\cdot\cos t$; $y = R\cdot\sin t + b - R$. Тогда при изменении параметра на dt ~~угол~~ дуга, пройденная по этой окружности, составит $d\alpha = \frac{dl}{R} = \frac{\sqrt{dx^2+(b-dy)^2}}{R} = \sqrt{\left(\frac{dx}{R}\right)^2 + \left(\frac{b}{R}-\frac{dy}{R}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-a\cdot dt}{R}\right)^2+\left(\frac{b}{R}\right)^2} =$

$= \frac{b}{R}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}dt^2} = \frac{b}{R}\left(1+\frac{a^2 dt}{2b^2}\right) = \frac{b}{R} + a^2 dt$