ГА-03 | стр. 1

1 Д-но: $\Delta l = 2h$ (h - длина гномона; Δl - изменение в длине полученной тени)

Опр-ть: φ - ?

Р-ие: В течение года максимальная длина тени $l_{max} = \frac{h}{\operatorname{tg} h_{\odot min}}$, а минимальная длина тени $l_{min} = \frac{h}{\operatorname{tg} h_{\odot max}}$, где $h_{\odot min}$ и $h_{\odot max}$ - мин. и макс. высоты солнца в полдень (т.е. в верхней кульминации).

$h_{\odot min} = 90° - \varphi - \varepsilon$ $h_{\odot max} = 90° - \varphi + \varepsilon$

Обозначим за $\alpha = 90° - \varphi$, а за $\beta = \varepsilon$. Тогда получим следующее:

$$\Delta l = 2h = l_{max} - l_{min} = h\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right)$$

Используем формулы тангенса суммы и тангенса разности и получим

$$2 = \frac{(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta) - (1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)}{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}$$

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\beta = \cancel{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta + \cancel{\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}\alpha} - \cancel{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta - \cancel{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta}$$

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\beta = 2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta + 2\operatorname{tg}\beta \quad |:2$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}\beta$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}\beta+1)}{(1-\operatorname{tg}\beta)}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \sqrt{\frac{0{,}4\cdot 1{,}4}{0{,}6}} \approx \sqrt{\frac{2\cdot 14}{30}} \approx \sqrt{\frac{28}{30}} \approx 1$$

Тогда $\alpha \approx 45°$ и $\varphi = 45°$

Заметим, что $\beta = 23{,}5° \approx 22{,}5° \approx \frac{45°}{2}$

$$\operatorname{tg}45° = \frac{2\operatorname{tg}22{,}5°}{1-\operatorname{tg}^2 22{,}5°}$$

$$\Rightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 22{,}5° = 2\operatorname{tg}22{,}5°$$

$$\operatorname{tg}^2 22{,}5° + 2\operatorname{tg}22{,}5° - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}22{,}5° = -1 + \sqrt{1+1} = -1+\sqrt{2} \approx 0{,}4$$

(т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ в I-ой четверти положительный)

Для южных широт всё то же самое, только широта будет со знаком минус и макс. и мин. высоты солнца будут в противоположные дни

Ответ: $\approx \pm 45°$

3: Д-но: $M = 1{,}4 M_\odot$ $T = 0{,}03^d$ $m = 14{,}5\cdot 2\cdot 10^{-27}$ кг $= 0{,}0145 M_\odot$

Опр-ть: в-во, из кот. состоит спутник?

Р-ие: Согласно третьему закону Кеплера период $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$, но $m < M$, поэтому при расчёте m можно пренебречь. Тогда большая полуось орбиты спутника

$T = 0{,}03\cdot 24\cdot 3600 = 0{,}72\cdot 3600 = 72\cdot 36 = 2592 \approx 3\cdot 10^3$ с

$$a = \left(\frac{9\cdot 10^6\cdot 7\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}4\cdot 10^{30}\cdot 2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(9\cdot 5\cdot 10^{35-11}\right)^{1/3} = (9\cdot 5)^{1/3}\cdot 10^8 = (45)^{1/3}\cdot 10^8 \text{ м}$$

$\pi^2 = 9{,}86 \approx 10$; $4{,}9$ $(7\cdot 0{,}7)$

$3^3 = 27$ $4^3 = 64$

$\Downarrow$ $45 \approx 3{,}2-3{,}3$

$a = 3{,}2-3{,}3\cdot 10^8$ м. Заметим, что орбита данного спутника меньше радиуса Солнца ($R = 7\cdot 10^8$ м). Также пульсарами могут быть нейтронные звёзды, и.д. (Обычную звезду тут расс.

рилсть даже не нужно, т.к. тогда бы объект не наблюдался бы в принципе! При массе 1,4 Мо радиус нормальной звезды больше R☉). В данном случае масса небольшая. Следовательно, ~~это~~ пульсар – нейтронная звезда. Нейтронные звёзды образуются из объектов, которые по ~~размерам~~ массе ~~больше, чем~~ больше 8 M☉. ~~Но~~ у таких звезды радиус в несколько раз больше солнечного. Следовательно, объект не эволюционировал вместе с звездой. Тогда это либо планета похожая на Юпитер, у кот. состав примерно такой же, как у Юпитера, либо бурый карлик, ~~состоящий~~ кот. состоит из тяжёлых элементов Ni, Fe .....

33 Д-но: $\varphi_1 = 30°33'$ с.ш.; $\lambda_1 = 90°47'$ з.д.; $\varphi_2 = 46°27'$ с.ш.; $\lambda_2 = 119°25'$ з.д.;
$\varphi_3 = 43°38'$ с.ш. $\lambda_3 = 10°30'$ в.д. 31 декабря $UT = 22^h$ $\Delta t = 3\cdot10^{-3}$ с $\Delta T = 30^{min}$ $\varphi_4 = 43°40'$ с.ш.
$\lambda_4 = 41°26'$ в.д.
Опр-ть: α - ? δ - ?

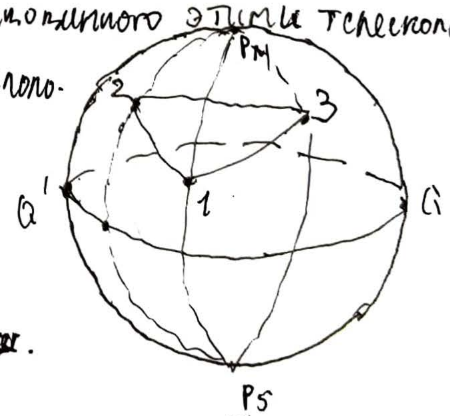
Р-ие: Задержка в получении сигнала гравитационными телескопами составила порядка $3\cdot10^{-3}$ с. Гравитационная волна распространяется также со скоростью света. Тогда разница в расстояниях до трёх ~~обсерваторий~~ телескопов от объекта $\Delta L = c\cdot\Delta t = 3\cdot10^{-3}\,c\cdot 3\cdot10^{8}$ м/с $= 9\cdot10^{5}$ м $=$ 90 км. Это максимальное различие в расстояниях. На самом деле оно меньше. Данные телескопы находятся на расстояниях друг от друга больше чем $\frac{\Delta\alpha_{min}}{360°}\cdot R_\oplus = 500$ км

($\Delta\alpha_{min}$ – мин. угловое расстояние м/у 2-мя телескопами (т.е. м/у теми, координаты кот. ближе)

$$\Delta\alpha_{min} = \sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2\cos^2\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)+(\varphi_1-\varphi_2)^2} \approx \sqrt{(30\cdot 0{,}545)^2+16^2} = \sqrt{15^2\cdot 2+16^2} = \sqrt{450+256} = \sqrt{706}$$

$26 < \sqrt{706} < 27 \approx 27{,}7$ Тогда $l = \frac{27{,}7}{360°}\cdot R_\oplus \approx \frac{6400}{12} = \frac{1600}{3} \approx 500$ км.

~~А~~ разница в расстояниях не превосходит 90 км. Следовательно, можно предположить, что пульсар находится внутри сферического треугольника, образованного этими телескопами. Поскольку неизвестно точно, где именно он находится, то можно предположить, что координаты пульсара (в момент времени $UT = 22^h$) будут соответствовать середине данного треугольника.

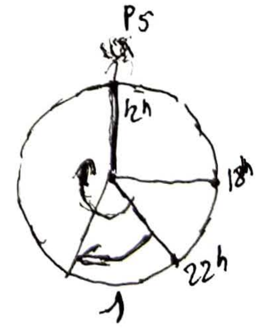


Координаты середины найдём следующим способом:

$\lambda = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3} \approx 67°$ з.д. $\varphi = \frac{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}{3} \approx \frac{120{,}5}{3} \approx 40°$ с.ш.

$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \approx 200 \quad \frac{200}{3} \approx 67°)$

Тогда склонение пульсара будет порядка $40°$,



Прямое же восхождение можно определить след. образом:

$\alpha = \alpha_\odot + 10^h + \lambda = \alpha_\odot + 14^h$

Прямое восхождение солнца можно определить исходя из даты 31 декабря. $\delta = \varepsilon\cdot\sin\frac{360\cdot(...)}{365} \approx \varepsilon$

$\Rightarrow \alpha_\odot \approx 18^h$

Тогда $\alpha = 18^h + 14^h - 24^h = 8^h$

Ответ: $\alpha \approx 8^h$ $\delta \approx 40°$.

34: Д-но: $\lambda_0 = 5170{,}7\,Å$; $\lambda = 5174{,}1\,Å$; $\lambda_1 = 5174{,}2\,Å$. $\rho = 0{,}7$ г/см³

Опр-ть: L_{min} -?

Р-ие: Определим с помощью эффекта Доплера скорость вращения звезды:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{0{,}1\,Å}{5174{,}1\,Å} = \frac{v}{c} \Leftrightarrow v = \frac{3\cdot 10^7}{5174{,}1} \approx \frac{3\cdot10^7}{5\cdot10^3} = 0{,}6\cdot10^4 \approx 6\text{ км/с}$$

Заметим также, что длина волны линии поглощения Натрия отличается от лабораторной, т.е. ~~наблюдается~~ наблюдается красное смещение.

Вообще, красное смещение может быть обусловлено разными факторами, к примеру, за счёт собственного движения звезды, из-за различия в температуре и т.д. Но в данном случае красное смещение обусловлено по большей части собственной скоростью звезды (температурное изменение характерно для несущественно + для атомы натрия связи с протонами не работают)

Оценим ~~тогда~~ максимально возможный радиус звезды:

$$\boxed{\begin{cases} v = \omega\cdot R \\ m\omega^2 R = \dfrac{GM\cdot m}{R^2} \end{cases}} \Rightarrow v = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2}\cdot R \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}, \text{ но } M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3v^2}{4\pi\rho G} = R^2. \text{ Тогда } R = \left(\frac{36\cdot10^6\cdot 3}{7\cdot10^{-11}\cdot 4\pi\cdot 700}\right)^{1/2} = \left(\frac{9}{40}\,10^{15}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{1}{5}\cdot10\cdot10^{14}\right)^{1/2} \approx \sqrt{2}\cdot10^7 \approx$$

$$\approx 14000\text{ м} = 14000\text{ км}$$

~~Максимально возможный радиус такой звезды меньше,~~ чем

Тогда масса звезды (макс. возможная)

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 \approx 4\cdot700\cdot(1{,}4\cdot10^7)^3 = 4\cdot7\cdot1{,}66\cdot10^{23} = 4\cdot7\cdot1{,}66\cdot10^{23} \approx \frac{28\cdot 2\cdot10^{23}}{2\cdot10^{30}} M_\odot = 28\cdot10^{-7} M_\odot \approx 3\cdot10^{-6} M_\odot$$

и если звезда принадлежит г.п., то

$$\frac{L}{L_\odot} \approx \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4 \text{ и}$$

$$L = (3\cdot10^{-6})^4\cdot 4\cdot10^{26}\text{ Вт} = 32400\text{ Вт}$$

Ответ: 32400 Вт.

35: Д-но: M; T; μ

Опр-ть: $\rho(h, r)$

Р-ие: Рассмотрим маленькую часть диска, находящуюся на расстоянии r в плоскости диска и на высоте h. На неё будут действовать силы притяжения со стороны центрального тела, а также сила давления со стороны других частей диска. Согласно условию гидродинамического равновесия:

$$\vec{F_g} + \vec{F_p} = 0 \quad (\text{где } \vec{F_g} \text{ — грав. сила притяжения, } \vec{F_p} \text{ — сила давления}).$$

$$F_g = -\frac{GM\,dm}{\sqrt{h^2+r^2}} = -\frac{GM\rho(h)\cdot dS\cdot dh}{\sqrt{h^2+r^2}}$$

$$F_p = p\cdot dS$$

В данном случае газ можно приблизительно считать идеальным, тогда

$$p = \frac{\rho_{cp.1}RT}{\mu} - \frac{\rho_{cp2}RT}{\mu}$$

(если ~~газ находится не скр~~ данная маленькая масса находится не с краю, т.е. над ней ещё есть какой-то газ.) Тогда имеем (с учетом проекции F_g на ось Y)

$$\frac{GM\rho(h)\,dS\,dh\cdot h}{\sqrt{h^2+r^2}\cdot r} = -\frac{RT}{\mu}(\rho_{cp1}-\rho_{cp2})\,dS$$

$\rho_{cp1}-\rho_{cp2} \approx d\rho$ (если h фрагмента не большое, т.е. он близко к оси симметрии.

Тогда имеем следующее

$$-\frac{GM\rho(h)\,dh\cdot h}{\sqrt{h^2+r^2}\cdot r} = \frac{RT}{\mu}d\rho$$

$$-\frac{GM}{r}\frac{h\,dh}{\sqrt{h^2+r^2}} = \frac{RT\,d\rho}{\mu\rho(h)}$$

Проинтегрируем получившееся выражение и получим следующее:

$$\frac{GM}{r}\sqrt{h^2+r^2}\Big|_0^h = \frac{RT}{\mu}\ln\rho\Big|_{\rho_0}^{\rho}$$ (т.к. плотность у оси симметрии должна быть больше

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = -\left(\frac{GM}{r}\sqrt{h^2+r^2} - GM\right)\frac{\mu}{RT} = -\frac{GM\mu}{RT}\left(\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r}-1\right) = \frac{GM\mu}{RT}\left(\sqrt{\frac{h^2}{r^2}+1}-1\right)$$

Если $h \ll r$, то $\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}} \approx 1+\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2}$. Тогда имеем

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{GM\mu h^2}{2RT\,r^2}$$ или $$\rho = \rho_0 e^{-\frac{GM\mu h^2}{2RTr^2}}$$